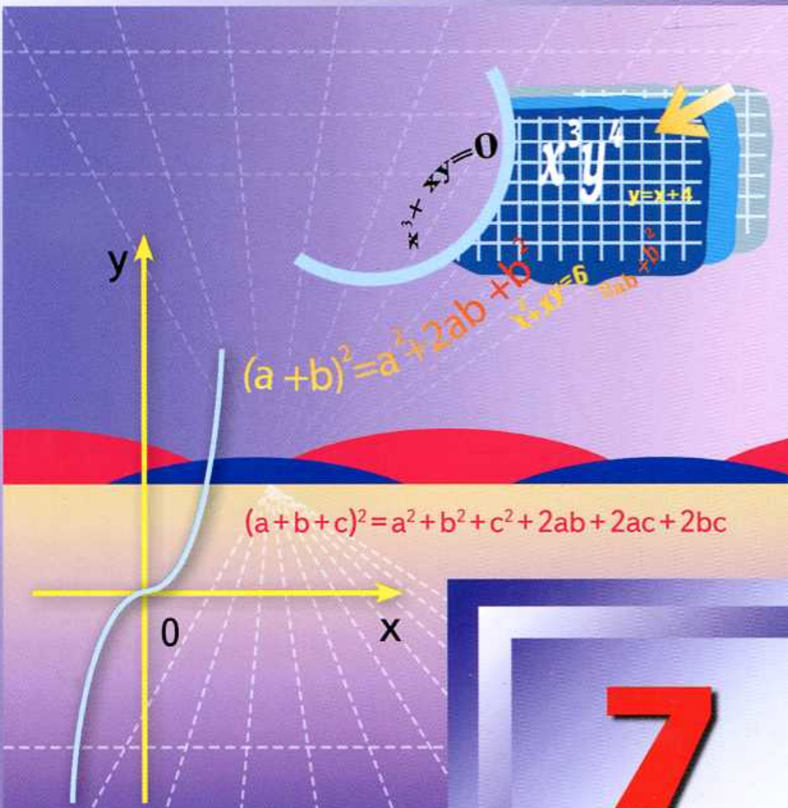
ФГОС В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А.Н. РУРУКИН

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ

по АЛГЕБРЕ

к учебнику Ю.Н. Макарычева и др.



7 КЛАСС

ФГОС В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А. Н. РУРУКИН

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ

к учебнику Ю.Н. Макарычева и др.
(*М.: Просвещение*)

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

7 класс

МОСКВА • «ВАКО» • 2014

УДК 337:167.1:51
ББК 74.262.21
Р87

Рурукин А.Н.

Р87 Поурочные разработки по алгебре. 7 класс. – 2-е изд., перераб. – М.: ВАКО, 2014. – 352 с. – (В помощь школьному учителю).

ISBN 978-5-408-01757-7

Предлагаемое издание представляет собой поурочные разработки по алгебре для 7 класса и предназначено для работы с учебником Ю.Н. Макарычева и др. (М.: Просвещение). В пособии учитель найдет все, что необходимо для подготовки к урокам: тематическое планирование учебного материала, подробные поурочные планы, методические советы и рекомендации, творческие задания, письменные опросы и самостоятельные работы, тексты контрольных (трех уровней сложности) и зачетных работ и их подробный разбор.

Пособие соответствует требованиям ФГОС и может быть использовано как начинающими педагогами, так и преподавателями со стажем.

УДК 337:167.1:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-408-01757-7

От автора

В 7 классе школьники начинают изучать новый раздел математики – алгебру. Поэтому цель обучения – развить интерес к решению алгебраических задач и показать применимость алгебраического подхода в других изучаемых в школе дисциплинах – геометрии, физике, химии и т. д. В курсе алгебры 7 класса начинают изучать основные понятия: алгебраические выражения и их преобразования, одночлены и многочлены и действия с ними (включая формулы сокращенного умножения), уравнения и способы их решения, системы уравнений и способы их решения, функции и графики функций. В последующих классах они будут уточняться и дополняться, но основы закладываются именно в начале обучения (в 7 классе).

Настоящее пособие адресовано прежде всего преподавателям, работающим по учебнику Ю.Н. Макарычева и др. (М.: Просвещение), и рассчитано на 102 урока (34 учебные недели). Нумерация задач в поурочном планировании приведена в соответствии с данным учебником.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько расширен изучаемый материал: дано представление о нелинейных уравнениях и системах нелинейных уравнений, об уравнениях и системах уравнений, содержащих модули и параметры, о построении графиков более сложных функций и уравнений, добавлены формулы сокращенного умножения: куб суммы и куб разности. Такое расширение материала вполне доступно для семиклассников, развивает их интерес к изучению алгебры и дает более цельное представление об изучаемых темах. Кроме того, приведенные дополнения подготавливают школьников к углубленному изучению математики в старших классах.

Предусмотрены два вида фронтального контроля успеваемости: контрольные и зачетные работы. Контрольные работы имеют три степени сложности. Выбор каждой определяется или учителем, или учеником. При этом за выполнение более сложного варианта контрольной работы ученик поощряется дополнительным баллом. В контрольной работе приводится на одну задачу больше, чем необходимо для получения высшей оценки. Наличие лишней задачи подразумевает некоторую свободу выбора учащихся.

В пособии представлены 10 контрольных работ. Зачетные работы приведены для коррекции результатов последних. Задачи разбиты на три блока по степени сложности и оцениваются разным количеством баллов. Нужное для получения оценки число задач может быть набрано из разных блоков. Даже для получения высшей отметки необходимо решить не более половины задач варианта, поэтому у учащихся имеется значительная свобода выбора при решении. В пособии даны также 6 зачетных работ по темам.

В конце обучения проводится итоговая контрольная работа, проверяющая навыки и умения учащихся по основным (базовым) темам.

Контрольные и зачетные работы приведены с полным разбором задач. Предполагается размещение данных решений на стенде, так как разобрать все задачи на уроке невозможно, да и нецелесообразно.

Для текущего контроля усвоения понятий и овладения основными навыками и умениями предусмотрены письменные опросы и самостоятельные работы (практически на каждом уроке).

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время.

В качестве дополнительного материала к урокам учитель может использовать издания:

- Контрольно-измерительные материалы. Алгебра. 7 класс / Сост. Л.И. Мартышова. М.: ВАКО, 2014.
- Рурукин А.Н. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре. 7 класс. М.: ВАКО, 2014.

Рекомендации к проведению уроков

Разумеется, все изложенное носит исключительно рекомендательный характер. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению алгебры. Поэтому ни одно планирование не может являться догмой. Весь ход урока должен способствовать обучению школьников. На наш взгляд, пусть каждый отдельный ученик лучше усвоит тот материал, который в состоянии понять, чем не поймет ничего. В последнем случае ситуация принимает лавинообразный характер: у учащихся возникает комплекс неполноценности, к выполнению домашнего задания привлекаются все домочадцы, ученики начинают списывать, подсказывать друг другу, использовать шпаргалки и т. д.

Содержание уроков в данном пособии является избыточным (в расчете на очень подготовленный, сильный класс). При необходимости часть материала следует опустить либо изложить достаточно поверхностно. С учетом несобранности и неорганизованности семиклассников желательно иметь в расписании сдвоенные уроки алгебры, особенно при написании контрольных работ и сдаче тематических зачетов.

Поурочное планирование включает в себя четыре основных вида занятий:

1) урок изучения нового материала;

2) урок отработки и закрепления пройденного материала;

3) контрольная работа;

4) тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

1. ***Урок изучения нового материала*** включает в себя следующие этапы.

I. Сообщение темы и цели урока (≈ 1–2 мин). Следует донести до учащихся необходимость данной темы (области применения этих знаний) и сообщить цель занятия (навыки и приемы, которыми ученики должны овладеть в ходе проведения урока).

II. Работа по теме урока (≈ 15 мин). Здесь возможны два подхода:

1) с помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя учащиеся самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правил рассматриваемого раздела алгебры. Затем педагог уточняет и корректирует эти результаты. Однако, учитывая, что изучение алгебры начинается именно в 7 классе и все понятия для учеников незнакомы, такой подход можно рекомендовать лишь для самых простых тем либо отдельных фрагментов урока;

2) учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но является недостаточно эффективным (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснение ее решения).

III. Задания на уроке учитель дает из числа наиболее характерных, типовых задач (≈ 15 мин). Они могут выполняться:

1) самостоятельно учащимися всего класса в тетрадях с последующим разбором одним из учеников (например, первым

выполнившим) у доски; при этом желательна активная работа всех учащихся: поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, предложение других способов решения и т. д.;

2) в ходе диалога учеников, сидящих за одной партой (выполнение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка);

3) у доски одним или несколькими учащимися.

После выполнения заданий возможен как взаимоконтроль учеников у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. Разумеется, при этом будет происходить и диалог учителя с отвечающим у доски.

IV. Контрольные вопросы по изучаемому материалу задает учитель для проверки усвоения и понимания новых понятий, терминов и т. д. (≈ 5 мин). Вопросы можно адресовать как одному ученику, так и всему классу. Следует обратить внимание именно на понимание понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется попросить учащегося, кроме определения, привести соответствующие примеры. В случае затруднения такие примеры могут привести другие ученики или учитель.

V. Творческие задания (предусмотрены во многих уроках). От приведенных в учебнике они отличаются или *большей сложностью*, или *нестандартностью формулировки*, или *новым способом решения*. Поэтому очень полезно разобрать подобные задания. В зависимости от подготовленности класса они могут быть рассмотрены:

1) на внеклассных занятиях (дополнительные занятия, кружки, факультативы и т. д.);

2) со всеми учащимися как в качестве задания на уроке, так и в качестве домашнего задания;

3) дифференцированно с наиболее подготовленными учениками или на уроке, или дома;

4) во время проведения математических боев, олимпиад, недель математики и т. д.

Творческие задания выполняются в пределах отведенного на урок времени.

VI. Подведение итогов урока (≈ 1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы учеников, ответов у доски, отдельных дополнений, вопросов, комментариев учащихся. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

Домашнее задание дается учителем из числа типовых, характерных задач, аналогичных рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 30–40 мин. Желательно, чтобы учащимися были рассмотрены разные способы решения задач. Это способствует активизации мышления школьников, творческому пониманию материала и т. д.

Необходимо приучить учашихся при выполнении домашнего задания фиксировать непонятый материал: теоретические сведения, нерешенные задачи и т. д. Полезно научить учеников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос — это половина ответа на него. Особенно такие навыки понадобятся учащимся в старших классах. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо разобрать на ближайшем занятии по алгебре.

2. ***Урок на отработку и закрепление пройденного материала*** отличается этапом II, который предусматривает повторение и закрепление пройденного материала (≈ 20 мин). Прежде всего, данный этап включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы их задавали сами учащиеся. Вопросы могут содержать непонятые определения, термины и другой теоретический материал.

Скорее всего, понадобится и разбор нерешенных задач. В этой части урока желательна максимальная активность всего класса. Ученик, объясняя и комментируя свое решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более удобными для понимания ровесниками, чем объяснения учителя. Ориентировочное время, отведенное на эту стадию этапа II, составляет ≈ 5—10 мин.

На второй стадии данного этапа предусмотрен контроль усвоения материала (письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ≈ 10—15 мин.

Задания для *письменного опроса* содержат теоретический вопрос и 1—2 задачи, аналогичные заданиям, выполненным в классе, и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на понимание учеником тех или иных понятий, а не на строгость и четкость формулировок (к ним учащиеся придут в старших классах).

Самостоятельная работа включает 2—3 типовые, характерные задачи.

В материалах уроков тесты не содержатся. Это связано с тем, что учащиеся 7 класса очень часто ошибаются. Тестирование не дает возможности выявить причину ошибки: непонимание темы, невнимательность, пробелы в усвоении предыдущего материала, арифметические ошибки и т. д. Поэтому тестирование целесообразно в более старших классах (да и то при контроле усвоения лишь определенных тем).

3. По каждой изучаемой теме приводятся одна или две ***контрольные работы***. Они представлены в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные).

Вариант содержит 6 задач, из которых две последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, задачи, приведенные в контрольных работах, подобны задачам, решаемым в классе и дома. Выбор варианта делают или сами учащиеся (с учетом их самооценки), или учитель (с учетом успехов учеников).

Оценка контрольной работы может быть осуществлена следующим образом: при выполнении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При тех же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 к набранным баллам добавляются дополнительно 0,5 балла, за решение задач вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (учитывая бóльшую их сложность).

Контрольная работа рассчитана на один урок (на наш взгляд, это оптимальное время для написания работы).

После каждой контрольной работы проводится ее анализ и разбор наиболее сложных задач. Ко всем задачам вариантов 1–4 приведены ответы, задачи вариантов 5, 6 разобраны. По окончании контрольной работы желательно представить на стенде в классе разбор задач всех вариантов. Заметим, что за счет дифференциации самих вариантов и заданий в них возможна некоторая необъективность оценивания выполнения контрольной работы.

4. Чтобы устранить подобную необъективность, дать ученикам возможность повышения оценок, еще раз повторить и закрепить пройденную тему на последнем занятии, факультативно проводится письменный ***тематический зачет***. На проведение зачета желательно выделить два урока.

Задания тематического зачета даны в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три блока: блок А содержит самые простые задачи, блок В – более сложные и блок С – самые сложные. Каждая задача из блока А оценивается 1 баллом, из блока В – 2 баллами, из блока С – 3 баллами. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, «4» – за 10 баллов, «5» – за 14 баллов.

Тематическое планирование учебного материала

№ урока	Тема урока
Глава I. ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ (22 ч)	
§ 1. Выражения (5 ч)	
1	Числовые (арифметические) выражения
2	Вычисление числовых выражений (десятичные дроби)
3	Выражения с переменными
4	Допустимые значения переменных в выражениях. Формулы
5	Сравнение значений выражений
§ 2. Преобразование выражений (5 ч)	
6	Свойства действий над числами
7	Тождества
8, 9	Тождественные преобразования выражений
10	Контрольная работа № 1 по теме «Числовые и алгебраические выражения. Тождественные преобразования выражений»
§ 3. Уравнения с одной переменной (7 ч)	
11, 12	Уравнение и его корни
13	Линейное уравнение с одной переменной
14	Решение линейных уравнений
15–17	Решение задач с помощью уравнений
§ 4. Статистические характеристики (5 ч)	
18, 19	Среднее арифметическое, размах и мода
20, 21	Медиана как статистическая характеристика
22	Контрольная работа № 2 по теме «Уравнения с одной переменной»
Глава II. ФУНКЦИИ (11 ч)	
§ 5. Функции и их графики (5 ч)	
23	Что такое функция
24, 25	Вычисление значений функций по формуле
26, 27	График функции
§ 6. Линейная функция (6 ч)	
28, 29	Прямая пропорциональность и ее график
30, 31	Линейная функция и ее график
32	Взаимное расположение графиков линейных функций

№ урока	Тема урока
33	Контрольная работа № 3 по теме «Функции»
Глава III. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ (11 ч)	
§ 7. Степень и ее свойства (5 ч)	
34	Определение степени с натуральным показателем
35, 36	Умножение и деление степеней
37, 38	Возведение в степень произведения и степени
§ 8. Одночлены (6 ч)	
39	Одночлен и его стандартный вид
40, 41	Умножение одночленов. Возведение одночлена в степень
42, 43	Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики
44	Контрольная работа № 4 по теме «Степень с натуральным показателем»
Глава IV. МНОГОЧЛЕНЫ (17 ч)	
§ 9. Сумма и разность многочленов (3 ч)	
45	Многочлен и его стандартный вид
46, 47	Сложение и вычитание многочленов
§ 10. Произведение одночлена и многочлена (7 ч)	
48	Умножение одночлена на многочлен
49, 50	Использование умножения одночлена на многочлен при преобразовании алгебраических выражений и решении уравнений
51–53	Вынесение общего множителя за скобки
54	Контрольная работа № 5 по теме «Сумма и разность многочленов. Произведение одночлена и многочлена»
§ 11. Произведение многочленов (7 ч)	
55, 56	Умножение многочлена на многочлен
57, 58	Разложение многочлена на множители способом группировки
59, 60	Доказательство тождеств
61	Контрольная работа № 6 по теме «Многочлены»
Глава V. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ (19 ч)	
§ 12. Квадрат суммы и квадрат разности (5 ч)	
62	Возведение в квадрат суммы и разности двух выражений
63, 64	Возведение в куб суммы и разности двух выражений
65, 66	Разложение на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности

№ урока	Тема урока
§ 13. Разность квадратов. Сумма и разность кубов (7 ч)	
67, 68	Умножение разности двух выражений на их сумму
69, 70	Разложение разности квадратов на множители
71, 72	Разложение на множители суммы и разности кубов
73	Контрольная работа № 7 по теме «Квадрат суммы и разности. Разность квадратов. Сумма и разность кубов»
§ 14. Преобразование целых выражений (7 ч)	
74, 75	Преобразование целого выражения в многочлен
76, 77	Применение различных способов для разложения на множители
78, 79	Применение преобразований целых выражений
80	Контрольная работа № 8 по теме «Формулы сокращенного умножения»
Глава VI. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (14 ч)	
§ 15. Линейные уравнения с двумя переменными и их системы (5 ч)	
81	Линейное уравнение с двумя переменными
82, 83	График линейного уравнения с двумя переменными
84, 85	Системы линейных уравнений с двумя переменными
§ 16. Решение систем линейных уравнений (9 ч)	
86–88	Способ подстановки
89–91	Способ сложения
92, 93	Решение задач с помощью систем уравнений
94	Контрольная работа № 9 по теме «Системы линейных уравнений»
ПОВТОРЕНИЕ КУРСА 7 КЛАССА (8 ч)	
Подготовка к итоговой контрольной работе	
95	Повторение темы «Выражения. Тождества. Уравнения»
96	Повторение темы «Функции»
97	Повторение темы «Степень с натуральным показателем»
98	Повторение темы «Многочлены»
99	Повторение темы «Формулы сокращенного умножения»
100	Повторение темы «Системы линейных уравнений»
101	Итоговая контрольная работа
102	Подведение итогов обучения

Глава I
ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ

§ 1. ВЫРАЖЕНИЯ

Урок 1. Числовые (арифметические) выражения

Цели: ознакомить с числовыми выражениями и основными понятиями; напомнить, как выполнять действия над обыкновенными дробями.

Планируемые результаты: усвоить понятия числового выражения и его значения, выражения, не имеющего смысла; вспомнить действия над обыкновенными дробями.

Тип урока: урок повторения изученного материала.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Работа по теме урока

План урока

1. Числовое выражение.
2. Значение числового выражения.
3. Обыкновенные дроби и действия над ними.

1. Числовое выражение

Запись, составленная из чисел с помощью арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень) и скобок, называется числовым (арифметическим) выражением. В частности, сами числа также можно рассматривать как числовые выражения.

Пример 1

Числовые выражения:

а) $5^2 - 3$;

б) $(2^3 + 4) : 6$;

в) $[3 + 2 \cdot (6 - 3)] : 5$;

г) 3;

д) $-2\frac{1}{11}$.

(Учитель просит учащихся привести свои примеры числовых выражений.)

Очень часто числовые выражения возникают при решении задач с текстовым содержанием.

Пример 2

В саду на даче растут 5 яблонь, 4 вишни и 3 сливы. Было собрано по 30 кг плодов с яблони, 10 кг – с вишни и 15 кг – со сливы. Какой урожай фруктов и ягод собрали в саду?

Решение

Так как с каждой яблони было собрано 30 кг плодов, то с 5 яблонь собрали $30 \cdot 5$ кг. Так как с каждой вишни было собрано 10 кг плодов, то с 4 вишен собрали $10 \cdot 4$ кг. Так как с каждой сливы было собрано 15 кг, то с 3 слив собрали $15 \cdot 3$ кг. Общий урожай фруктов и ягод равен сумме собранных плодов с яблонь, вишен и слив, т. е. $30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3$.

Решая задачу, получили числовое выражение

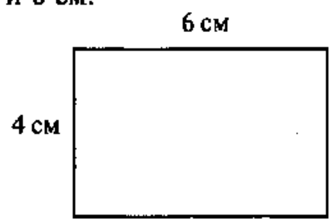
$30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3$.

Забегая вперед, вычислим значение этого выражения:

$30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3 = 150 + 40 + 45 = 235$ (кг).

Пример 3

Найдите периметр (сумму длин всех сторон) прямоугольника со сторонами 4 см и 6 см.



Решение

1-й способ

Можно посчитать непосредственно сумму длин сторон прямоугольника. Тогда получаем числовое выражение $4 + 6 + 4 + 6$ или $6 + 4 + 6 + 4$ (в зависимости от того, с какой стороны считаем сумму длин сторон).

2-й способ

Найдем сумму длин меньших сторон ($4 \cdot 2$ см) и сумму длин больших сторон ($6 \cdot 2$ см). Тогда сумма длин всех сторон (периметр прямоугольника) описывается числовым выражением $4 \cdot 2 + 6 \cdot 2$.

3-й способ

Найдем полупериметр прямоугольника – сумму длин меньшей и большей сторон: $4 + 6$. Учтем, что прямоугольник имеет две меньшие и две большие стороны. Тогда периметр описывается числовым выражением $2 \cdot (4 + 6)$.

Периметр прямоугольника равен 20 см.

Таким образом: а) по условию задачи можно составить разные числовые выражения; б) независимо от формы записи числового выражения результат его вычисления будет один и тот же (учитывая свойства арифметических действий).

Пример 4

Поезд ехал сначала 50 мин со скоростью 60 км/ч, затем остановился на станции на 10 мин, после чего двигался еще 1 ч со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость движения поезда.

Решение

В соответствии с определением средняя скорость движения равна отношению пройденного пути к затраченному на этот путь времени.

Вычислим путь и время движения. Прежде всего, учтем, что 50 мин $= \frac{50}{60}$ ч $= \frac{5}{6}$ ч, 10 мин $= \frac{10}{60}$ ч $= \frac{1}{6}$ ч (приведение к одинаковым единицам измерения времени). В начале движения был пройден путь $60 \cdot \frac{5}{6}$ (км), в конце движения – путь $40 \cdot 1$ (км).

Общий пройденный путь описывается числовым выражением $60 \cdot \frac{5}{6} + 40 \cdot 1$ (км).

Время, затраченное на этот путь (включая время на остановку), описывается числовым выражением $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 1$ (ч).

Тогда средняя скорость движения описывается числовым выражением

$$\frac{60 \cdot \frac{5}{6} + 40 \cdot 1}{\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 1}.$$

Вычислим значение этого выражения: $\frac{50 + 40}{2} = 45$ (км/ч).

2. Значение числового выражения

Число, которое получается в результате выполнения арифметических действий в числовом выражении, называется значением числового выражения.

Может оказаться, что в числовом выражении какое-то действие невыполнимо, тогда выражение не имеет смысла. Пока вам известно только одно невыполнимое действие – деление на нуль (в дальнейшем вы узнаете и другие такие действия: извлечение корня четной степени из отрицательных чисел, нахождение логарифма неположительных чисел и т. д.).

Пример 5

Найдите значение числового выражения $\frac{5^2 - 3 \cdot 6}{7}$.

Решение

Выполним действия в данном выражении:

$$\frac{5^2 - 3 \cdot 6}{7} = \frac{25 - 18}{7} = \frac{7}{7} = 1.$$

Итак, значение числового выражения $\frac{5^2 - 3 \cdot 6}{7}$ равно 1.

Пример 6

Найдите значение числового выражения:

а) $(5^3 - 1) : (15 - 3 \cdot 5)$;

б) $\frac{9^2 - 3 \cdot 5 + 1}{2^3 - 9 + 1}$.

Решение

Данные числовые выражения не имеют смысла, так как делить на нуль нельзя.

3. Обыкновенные дроби и действия над ними

(Необходимо вкратце напомнить учащимся о том, как выполнять действия над дробями.)

Обыкновенной дробью называется число вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Например: $\frac{4}{5}$; $\frac{17}{18}$; $\frac{26}{3}$; $\frac{1}{8}$.

Число m называют *числителем*, число n — *знаменателем* дроби. Всякое целое число можно рассматривать как обыкновенную дробь со знаменателем 1. Например: $4 = \frac{4}{1}$; $0 = \frac{0}{1}$; $3 = \frac{3}{1}$.

При действиях над дробями используется *основное свойство* дроби: если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же (не равное нулю) число, то получится дробь, равная данной дроби. Например:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}; \frac{28}{35} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{4}{5}.$$

Сокращение дроби: нужно числитель и знаменатель разложить на простые множители, найти их наибольший общий делитель (НОД) и поделить числитель и знаменатель на НОД.

Пример 7

Сократите дробь $\frac{105}{147}$.

Решение

Раскладываем числитель и знаменатель на простые множители: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $147 = 3 \cdot 7 \cdot 7$. Находим НОД чисел 105 и 147: НОД $(105, 147) = 3 \cdot 7 = 21$. Используя основное свойство дроби, делим ее числитель и знаменатель на НОД. Получаем

$\frac{105}{147} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{5}{7}$.

Приведение дроби к другому знаменателю: нужно числитель и знаменатель умножить на дополнительный множитель.

Пример 8

Приведите дробь $\frac{5}{7}$ к знаменателю 42.

Решение

Старый (7) и новый (42) знаменатели различаются в 6 раз. Поэтому в соответствии с основным свойством дроби числитель и знаменатель данной дроби умножим на дополнительный множитель 6. Получаем $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{30}{42}$.

Приведение нескольких дробей к общему знаменателю: нужно найти общий знаменатель дробей (он равен наименьшему общему кратному (НОК) знаменателей всех дробей) и привести каждую дробь к этому знаменателю (аналогично примеру 8).

Пример 9

Приведите дроби $\frac{4}{105}$ и $\frac{31}{147}$ к общему знаменателю.

Решение

Раскладываем знаменатели дробей на простые множители: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $147 = 3 \cdot 7^2$. Находим НОК чисел 105 и 147: НОК $(105, 147) = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 735$. Число 735 будет общим знаменателем данных дробей. Находим дополнительный множитель для каждой дроби. Для этого поочередно делим общий знаменатель на знаменатель каждой дроби.

Получаем дополнительный множитель к первой дроби: $\frac{735}{105} = 7$ — и ко второй дроби: $\frac{735}{147} = 5$. Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на найденный дополнительный множитель. Получаем $\frac{4}{105} = \frac{4 \cdot 7}{105 \cdot 7} = \frac{28}{735}$ и $\frac{31}{147} = \frac{31 \cdot 5}{147 \cdot 5} = \frac{155}{735}$.

Сложение (вычитание) дробей: нужно сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями. При этом знаменатель суммы (разности) остается прежним, а числители складываются (вычитаются). Если дроби имеют разные знаменатели, их предварительно приводят к общему знаменателю.

Пример 10

Выполните действия:

а) $\frac{4}{105}+\frac{31}{147}$; б) $\frac{4}{105}-\frac{31}{147}$.

Решение

а) В предыдущем примере эти дроби уже были приведены к общему знаменателю. Поэтому получаем

$$\frac{4}{105}+\frac{31}{147}=\frac{28}{735}+\frac{155}{735}=\frac{28+155}{735}=\frac{183}{735}.$$

Полученную дробь можно сократить:

$$\frac{183}{735}=\frac{3\cdot 61}{3\cdot 5\cdot 7^2}=\frac{61}{5\cdot 7^2}=\frac{61}{245}.$$

б) Разность данных дробей:

$$\frac{4}{105}-\frac{31}{147}=\frac{28}{735}-\frac{155}{735}=\frac{28-155}{735}=-\frac{127}{735}.$$

Вспомним еще некоторые понятия.

Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называется правильной. Например: $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{13}$.

Дробь, у которой числитель больше знаменателя либо равен ему, называется неправильной. Например: $\frac{25}{4}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{6}{6}$.

Из неправильной дроби можно выделить целую часть. Например: $\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}$; $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$; $\frac{6}{6}=1$.

Число, состоящее из целой и дробной части, называется смешанным.

В ряде случаев сложение и вычитание смешанных чисел удобно выполнять отдельно с целыми и дробными частями.

Пример 11

Сложите числа $7\frac{1}{3}$ и $3\frac{1}{6}$.

Решение

Получаем

$$7\frac{1}{3}+3\frac{1}{6}=(7+3)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=10+\frac{2+1}{6}=10+\frac{3}{6}=10+\frac{1}{2}=10\frac{1}{2}.$$

При умножении дробей получается дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению знаменателей дробей. Если возможно, то полученную дробь надо сократить. При умножении смешанные числа обращают в неправильные дроби.

Пример 12

Перемножьте числа $\frac{5}{29}$ и $3\frac{13}{15}$.

Решение

Прежде всего, смешанное число $3\frac{13}{15}$ обратим в неправильную дробь: $3\frac{13}{15} = 3 + \frac{13}{15} = \frac{3 \cdot 15 + 13}{15} = \frac{58}{15}$.

Умножим дроби $\frac{5}{29}$ и $\frac{58}{15}$, получим

$\frac{5}{29} \cdot \frac{58}{15} = \frac{5 \cdot 58}{29 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 29}{29 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$.

Два числа называются взаимно обратными, если их произведение равно единице. Например: 7 и $\frac{1}{7}$; $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{3}$; $2\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{5}$.

При делении дробей надо делимое умножить на число, обратное делителю.

Пример 13

Разделите дробь $\frac{17}{35}$ на число $1\frac{2}{49}$.

Решение

Обратим смешанное число $1\frac{2}{49}$ в неправильную дробь:

$1\frac{2}{49} = 1 + \frac{2}{49} = \frac{1 \cdot 49 + 2}{49} = \frac{51}{49}$.

Разделим дробь $\frac{17}{35}$ на дробь $\frac{51}{49}$, получим

$\frac{17}{35} : 1\frac{2}{49} = \frac{17}{35} : \frac{51}{49} = \frac{17}{35} \cdot \frac{49}{51} = \frac{17 \cdot 49}{35 \cdot 51} = \frac{17 \cdot 7^2}{5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{7}{5 \cdot 3} = \frac{7}{15}$.

III. Задания на уроке

1. Составьте числовые выражения, которые:

а) имеют смысл;

б) не имеют смысла.

Если выражение имеет смысл, то найдите его значение.

(Можно рекомендовать парную работу (например, соседи по парте): каждый учащийся определяет, имеет ли смысл выражение, записанное соседом, и объясняет почему. Если выражение имеет смысл, то находит его значение.)

Обратите внимание на то, что количество открывающихся и закрывающихся скобок, используемых в выражении, должно быть одинаковым.

2. По текстовой задаче составьте числовое выражение (по аналогии с примерами 4–6) и вычислите его значение.

(Учитель предлагает текстовую задачу.)

3. Обратная задача: по написанному простому числовому выражению составьте текстовую задачу.

(Учитель предлагает числовое выражение. Можно рекомендовать парную работу: соседи пишут выражения и обмениваются тетрадями, после этого составляют задачу по чужому выражению.)

4. Выполните действия (сложение и вычитание):

а) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$;

б) $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}$;

в) $\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$;

г) $\frac{2}{9}+\frac{3}{5}$;

д) $1\frac{2}{3}+2\frac{1}{4}$;

е) $3\frac{1}{3}+4\frac{2}{5}$;

ж) $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$;

з) $\frac{4}{7}-\frac{6}{7}$;

и) $\frac{5}{7}-\frac{3}{5}$;

к) $\frac{7}{9}-\frac{9}{10}$;

л) $4\frac{1}{3}-3\frac{1}{5}$;

м) $2\frac{1}{4}-3\frac{1}{2}$;

н) $5\frac{1}{6}-2\frac{1}{4}$;

о) $3\frac{1}{7}-1\frac{1}{3}$.

5. Выполните действия (умножение, деление, возведение в степень):

а) $\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}$;

б) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}$;

в) $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}$;

г) $\frac{6}{7}\cdot1\frac{2}{5}$;

д) $2\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{11}$;

е) $3\frac{2}{5}\cdot1\frac{3}{17}$;

ж) 3^2;

з) 4^3;

и) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$;

к) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$;

л) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$;

м) $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$;

н) $\frac{3}{5}:\frac{1}{5}$;

о) $\frac{2}{15}:\frac{8}{5}$;

п) $\frac{5}{8}:\left(-\frac{15}{4}\right)$;

р) $\left(-1\frac{1}{3}\right):\left(2\frac{1}{3}\right)$;

с) $5\frac{1}{3}:\frac{8}{9}$;

т) $\left(-3\frac{1}{4}\right):\left(-5\frac{3}{2}\right)$;

у) $\left(-4\frac{1}{6}\right):5$;

ф) $6:\left(-1\frac{1}{2}\right)$.

IV. Контрольные вопросы

(Опрос учащихся.)

– Что называется числовым выражением?

– В каком случае числовое выражение не имеет смысла?

– Что называется значением числового выражения?

– Какое число называется обыкновенной дробью?

– Назовите основное свойство дроби.

– Как сократить дробь?
– Как привести дроби к общему знаменателю?
– Как складываются (вычитаются) дроби?
– Какая дробь называется правильной? неправильной?
– Какое число называется смешанным?
– Как умножаются дроби? смешанные числа?
– Какие числа являются взаимно обратными?
– Как делятся дроби? смешанные числа?

V. Творческие задания

(Творческие задания можно использовать на уроке или дома.)

1. Используя четыре раза цифру 2, составьте выражение, значение которого равно 1, 2, 3, ..., 9 (если это возможно).

Например:

$2 : 2 + 2 - 2 = 1$;

$2 : 2 + 2 : 2 = 2$;

$(2 + 2 + 2) : 2 = 3$;

$(2 + 2) + 2 - 2 = 4$;

$2 + 2 + 2 : 2 = 5$ и т. д.

2. Установите закономерность и напишите три следующих числа в последовательности:

а) 3, 5, 7, 9, ... (арифметическая прогрессия, каждый член на два больше предыдущего);

б) 2, 5, 8, 11, ... (арифметическая прогрессия, каждый член на три больше предыдущего);

в) 3, 6, 12, 24, ... (геометрическая прогрессия, каждый член в два раза больше предыдущего);

г) 2, 6, 18, 54, ... (геометрическая прогрессия, каждый член в три раза больше предыдущего);

д) 1, 4, 9, 16, ... (квадраты натуральных чисел);

е) 1, 8, 27, 64, ... (кубы натуральных чисел);

ж) 1, 2, 3, 5, 8, ... (каждый член равен сумме двух предыдущих);

з) 1, 3, 4, 7, 11, ... (каждый член равен сумме двух предыдущих).

3. Найдите сумму дробей:

а) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100}$;

б) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 101}$;

в) $\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{98\cdot 100}$.

Решение

а) Надо учесть, что

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2};\ \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};\ \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4};\ \ldots;\ \frac{1}{99\cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}.$$

Тогда данная сумма

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

(в сумме сокращаются все дроби, кроме первой и последней).

(*Ответ:* $\frac{99}{100}$.)

б) Надо учесть, что

$$\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right); \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right); \frac{1}{5\cdot 7} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right); ...;$$

$$\frac{1}{99\cdot 101} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right).$$

Тогда данная сумма

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{101}\right) = \frac{50}{101}.$$

(*Ответ:* $\frac{50}{101}$.)

в) Надо учесть, что

$$\frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right); \frac{1}{4\cdot 6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right); \frac{1}{6\cdot 8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right); ...;$$

$$\frac{1}{98\cdot 100} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right).$$

Тогда данная сумма

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}\right) = \frac{49}{200}.$$

(*Ответ:* $\frac{49}{200}$.)

4. Может ли дробь, в которой числитель меньше знаменателя, быть равной дроби, в которой числитель больше знаменателя? Если да, приведите пример.

(*Ответ.* Может. Например: $\frac{-3}{6} = \frac{5}{-10}$.)

5. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 – остаток 2, при делении на 5 – остаток 4, при делении на 7 – остаток 6.

Решение

Рассмотрим число, которое на единицу больше данного. Тогда это число будет без остатка делиться на указанные числа: 2, 3, 5, 7. Эти числа простые. Поэтому наименьшее число, которое делится на 2, 3, 5, 7, – произведение этих чисел $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210$. Искомое число на единицу меньше, т. е. $210 - 1 = 209$.

6. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 – остаток 2, при делении на 4 – остаток 3, при делении на 8 – остаток 7.

Решение

Рассмотрим число, которое на единицу больше данного. Тогда это число будет без остатка делиться на указанные числа: 2, 3, 4, 8. Однако эти числа не взаимно простые. Поэтому наименьшее число, которое делится на 2, 3, 4, 8, равно НОК этих чисел. НОК $(2, 3, 4, 8) = 3 \cdot 8 = 24$. Искомое число на единицу меньше, т. е. $24 - 1 = 23$.

7. Найдите сумму чисел:

а) $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$.

(*Ответ:* 5050.)

Решение

Слагаемые являются членами арифметической прогрессии. Поэтому удобно сгруппировать первое слагаемое с последним, второе – с предпоследним и т. д. Получаем $S = (1 + 100) + (2 + + 99) + (3 + 98) + ... = 101 + 101 + ... + 101 = 101 \cdot 50 = 5050$.

б) $1 + 3 + 5 + ... + 97 + 99$.

(*Ответ:* 2500.)

в) $2 + 4 + 6 + ... + 98 + 100$.

(*Ответ:* 2550.)

8. Один рыбак поймал 3 рыбины, второй – 5 рыбин. Из этих рыбин сварили уху. Мимо рыбаков шел прохожий, и рыбаки пригласили его пообедать. После того как уха была съедена рыбаками и прохожим, прохожий дал рыбакам 80 руб. за уху. Как по справедливости рыбаки должны поделить эти деньги?

Решение

Очевидно, что поровну (по 40 руб.) делить деньги нельзя, так как рыбаки для ухи дали разное количество рыбы. Но нельзя также первому рыбаку дать 30 руб., а второму – 50 руб., так как рыбаки и сами ели уху (такой дележ был бы справедливым, если бы рыбаки просто продали прохожему свою рыбу). На уху пошло 8 рыбин. Прохожий заплатил за то, что съел сам, т. е. за третью часть от 8 рыбин. Тогда все 8 рыбин стоят в три раза дороже, т. е. $80 \cdot 3 = 240$ (руб.). Значит, одна рыбина стоит 30 руб. Поэтому 3 рыбины первого рыбака стоят $30 \cdot 3 = 90$ (руб.). Но сам рыбак съел ухи на 80 руб., и ему причитается $90 - 80 = 10$ (руб.). У второго рыбака 5 рыбин стоят $30 \cdot 5 = 150$ (руб.). Но и этот рыбак съел ухи на 80 руб., и ему причитается $150 - 80 = 70$ (руб.). Следовательно, справедливый дележ таков: первому рыбаку – 10 руб., второму – 70 руб.

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 4 (а, в, д, ж), 6 (а, б, г, и), 11, 13, 15.

Урок 2. Вычисление числовых выражений (десятичные дроби)

Цель: напомнить, как выполнять действия над десятичными дробями, порядок действий при вычислении выражений.

Планируемые результаты: отработать действия над десятичными дробями; вспомнить порядок действий при вычислении значений числовых выражений; рассмотреть основные задачи на проценты.

Тип урока: урок-практикум.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Что называется числовым выражением?

2. Выполните действия:

а) $1\frac{2}{3}+3\frac{4}{5}$; б) $2\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{13}$; в) $5\frac{1}{4}:\frac{7}{8}$.

3. В школьном саду с 5 яблонь было собрано по 25 кг плодов, с 6 слив – по 15 кг и с 8 вишен – по 6 кг. Составьте числовое выражение для нахождения массы собранного урожая и вычислите его значение.

Вариант 2

1. Что называется значением числового выражения?

2. Выполните действия:

а) $5\frac{2}{5}-2\frac{2}{3}$; б) $3\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{17}$; в) $4\frac{1}{5}:\frac{7}{15}$.

3. В школьном саду с 7 яблонь было собрано по 30 кг плодов, с 5 слив – по 12 кг и с 6 вишен – по 7 кг. Составьте числовое выражение для нахождения массы собранного урожая и вычислите его значение.

III. Работа по теме урока

План урока

1. Обыкновенные и десятичные дроби.
2. Действия над десятичными дробями.
3. Порядок действий при вычислении значений выражений.
4. Процент. Основные задачи на проценты.

1. Обыкновенные и десятичные дроби

Правильную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и т. д., можно записать в виде конечной десятичной дроби. Например: $\frac{7}{10} = 0{,}7$; $\frac{193}{1000} = 0{,}193$. Таким же образом можно записать смешанное число или неправильную дробь с указанным знаменателем. Например: $3\frac{9}{10} = 3{,}9$; $\frac{623}{100} = 6\frac{23}{100} = 6{,}23$. Если знаменатель дроби при разложении на простые множители содержит только числа 2 и 5 в различных степенях, то такую дробь также можно представить в виде конечной десятичной дроби, выполнив деление «уголком».

Пример 1

Представьте обыкновенную дробь $\frac{11}{40}$ в виде десятичной.

Решение

Разложим знаменатель дроби $\frac{11}{40}$ на простые множители: $40 = 2^3 \cdot 5$. Такое разложение содержит только множители 2 и 5. Разделив «уголком» числитель на знаменатель, получим

$$\begin{array}{r|l}
-\,11 & \underline{\;40\;} \\
\underline{80} & 0{,}275 \\
-\,300 & \\
\underline{280} & \\
-\,200 & \\
\underline{200} & \\
0 &
\end{array}$$

В результате обыкновенная дробь представлена в виде конечной десятичной: $\frac{11}{40} = 0{,}275$.

Если знаменатель дроби при разложении на простые множители содержит, кроме чисел 2 и 5, и другие числа, то такую дробь можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Пример 2

Представьте обыкновенную дробь $\frac{40}{11}$ в виде десятичной.

Решение

Разделив «уголком» числитель на знаменатель, получим

$$\begin{array}{r|l} 40 & 11 \\ \underline{-33} & 3{,}6363... \\ 70 & \\ \underline{-66} & \\ 40 & \\ \underline{-33} & \\ 70 & \\ \underline{-66} & \\ 40 & \end{array}$$

В результате обыкновенная дробь представлена в виде бесконечной десятичной периодической: $\frac{40}{11} = 3{,}6363... = 3{,}(63)$. Период десятичных дробей принято указывать в скобках.

Таким образом, *любую обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной* (конечной или бесконечной периодической). Справедливо также обратное утверждение: *любую конечную или бесконечную периодическую десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной.*

Конечную десятичную дробь сразу можно записать в виде дроби со знаменателем 10, 100 и т. д. (и выполнить, если необходимо, сокращение дроби).

Пример 3

Представьте дробь 0,128 в виде обыкновенной.

Решение

Получаем $0{,}128 = \frac{128}{1000} = \frac{16 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{16}{125}$.

Бесконечную десятичную периодическую дробь можно записать в виде обыкновенной, пользуясь следующим правилом:

1. Чтобы получить числитель дроби, нужно из числа, образованного цифрами, стоящими до второго периода, вычесть число, образованное цифрами, стоящими до первого периода.

2. Знаменатель дроби состоит из цифр 9 и 0. Цифра 9 повторяется столько раз, сколько было цифр в периоде, а цифра 0 – столько раз, сколько цифр содержится между запятой и первым периодом.

Пример 4

Представьте дробь 0,5(12) в виде обыкновенной.

Решение

До второго периода стоит число 512, до первого периода – число 5. Поэтому числитель дроби равен $512 - 5 = 507$. В периоде дроби стоят две цифры. Между запятой и первым периодом содержится одна цифра. Поэтому знаменатель дроби равен 990. Следовательно, получаем $0{,}5(12) = \frac{512-5}{990} = \frac{507}{990} = \frac{169 \cdot 3}{330 \cdot 3} = \frac{169}{330}$.

Аналогично можно представить и другие десятичные дроби в виде обыкновенных дробей или смешанных чисел.

Пример 5

Представьте в виде смешанного числа дробь:

а) 1,(15);

б) 2,13(22).

Решение

По аналогии с примером 4 получаем

$1{,}(15) = 1 + 0{,}(15) = 1 + \frac{15-0}{99} = 1 + \frac{5}{33} = 1\frac{5}{33}$;

$2{,}13(22) = 2 + 0{,}13(22) = 2 + \frac{1322-13}{9900} = 2 + \frac{1309}{9900} = 2\frac{1309}{9900}$.

Наиболее часто в примерах используются конечные десятичные дроби. Поэтому рассмотрим правила действий с ними.

2. Действия над десятичными дробями

Сложение и вычитание десятичных дробей выполняют *поразрядно*. При этом дроби записывают одну под другой, чтобы запятая оказалась под запятой.

Пример 6

Выполните действия:

а) 2,136 + 1,24; б) 2,136 – 1,24.

Решение

а) $\begin{array}{r} +\,2{,}136 \\ \underline{1{,}24} \\ 3{,}376 \end{array}$; б) $\begin{array}{r} -\,2{,}136 \\ \underline{1{,}24} \\ 0{,}896 \end{array}$.

Умножение десятичных дробей нужно выполнять, не обращая внимания на запятые. Затем *в полученном произведении надо отделить запятой справа столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.*

Пример 7

Перемножьте дроби 2,13 и 1,2.

Решение

Перемножим сначала натуральные числа 213 и 12.

$$
\begin{array}{r}
\times\, 213 \\
12 \\ \hline
426 \\
+\,213 \\ \hline
2556
\end{array}
$$

Теперь в полученном числе 2556 отделяем запятой три знака, так как в первом числе (2,13) после запятой два знака, а во втором числе (1,2) – один. Получаем число 2,556.

При делении десятичных дробей нужно *в делимом и делителе перенести запятые вправо на столько цифр, сколько их стоит в делителе после запятой*. Затем выполнить деление на натуральное число.

Пример 8

Разделите число 3,12 на: а) 2,4; б) 2,2.

Решение

а) Очевидно, что $3{,}12 : 2{,}4 = 31{,}2 : 24$. Далее производим деление «уголком».

$$
\begin{array}{r|l}
-\,31{,}2 & 24 \\ \cline{2-2}
24 & 1{,}3 \\ \cline{1-1}
-\,72 & \\
72 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

б) Очевидно, что $3{,}12 : 2{,}2 = 31{,}2 : 22$. Далее производим деление «уголком». В результате получаем число 1,4(18).

$$
\begin{array}{r|l}
-\,31{,}2 & 22 \\ \cline{2-2}
22 & 1{,}4181\ldots \\ \cline{1-1}
-\,92 & \\
88 & \\ \cline{1-1}
-\,40 & \\
22 & \\ \cline{1-1}
-\,180 & \\
176 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}
$$

Обратите внимание на то, что сумма, разность, произведение конечных десятичных дробей также являются конечными десятичными дробями. Частное от деления конечных десятичных дробей может быть и конечной десятичной дробью (пример 8,а) и бесконечной периодической десятичной дробью (пример 8,б).

Операции над бесконечными периодическими десятичными дробями выполнить намного *сложнее*. Самый *простой способ* решения таких задач — *перевести эти дроби в обыкновенные* и выполнять действия над обыкновенными дробями.

Пример 9

Вычислите значение выражения $1,(3) - 0,(6) \cdot 1,(18)$.

Решение

Переведем бесконечные периодические десятичные дроби в обыкновенные:

$$1,(3) = 1 + 0,(3) = 1 + \frac{3-0}{9} = 1 + \frac{3}{9} = 1\frac{1}{3};$$

$$0,(6) = \frac{6-0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3};$$

$$1,(18) = 1 + 0,(18) = 1 + \frac{18-0}{99} = 1 + \frac{2}{11} = 1\frac{2}{11}.$$

Теперь запишем тот же пример, но в виде обыкновенных дробей и выполним действия:

$$1\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot 1\frac{2}{11} = 1\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{11} = \frac{4}{3} - \frac{26}{33} = \frac{4 \cdot 11 - 26}{33} = \frac{44-26}{33} = \frac{18}{33} =$$

$$= \frac{6}{11} = 0,(54).$$

3. Порядок действий при вычислении значений выражений

1. Если выражение содержит скобки, то сначала выполняются все действия над числами, заключенными в скобках, а затем все остальные действия.

2. Сначала выполняют действия третьей ступени (возведение в степень), затем действия второй ступени (умножение и деление) и, наконец, действия первой ступени (сложение и вычитание). При этом действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны.

3. При вычислении дробного выражения выполняются действия в числителе и в знаменателе дроби и первый результат делится на второй.

Пример 10

Вычислите значение выражения: $\dfrac{\left(0,5 \overset{1}{:} 1,25 \overset{3}{+} \dfrac{7}{5} \overset{2}{:} 1\dfrac{4}{7} \overset{4}{-} \dfrac{3}{11}\right) \overset{5}{\cdot} 3}{\left(1,5 \underset{6}{+} \dfrac{1}{4}\right) \underset{7}{:} 18\dfrac{1}{3}} \; 8.$

Решение

Порядок действий указан в примере (в соответствии с перечисленными правилами). Выполним эти действия.

1) $0{,}5 : 1{,}25 = 0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$;

2) $\frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} = \frac{7}{5} : \frac{11}{7} = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{11} = \frac{49}{55}$;

3) $\frac{2}{5} + \frac{49}{55} = \frac{2 \cdot 11 + 49}{55} = \frac{22 + 49}{55} = \frac{71}{55}$;

4) $\frac{71}{55} - \frac{3}{11} = \frac{71 - 3 \cdot 5}{55} = \frac{71 - 15}{55} = \frac{56}{55}$;

5) $\frac{56}{55} \cdot 3 = \frac{168}{55}$;

6) $1{,}5 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$;

7) $\frac{7}{4} : 18\frac{1}{3} = \frac{7}{4} : \frac{55}{3} = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{55} = \frac{21}{220}$;

8) $\frac{168}{55} : \frac{21}{220} = \frac{168}{55} \cdot \frac{220}{21} = \frac{168 \cdot 220}{55 \cdot 21} = \frac{8 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 55}{55 \cdot 21} = 8 \cdot 4 = 32.$

Итак, результатом выполненных действий является число 32.

Пример 11

Вычислите значение выражения: $\dfrac{\overset{①}{0{,}23(7) + \frac{43}{450}}}{\underset{②}{0{,}5(61) - \frac{113}{495}}}$. ③

Решение

Порядок действий указан в примере. Прежде всего, обратим бесконечные десятичные периодические дроби в обыкновенные. Получаем

$$0{,}23(7) = \frac{237 - 23}{900} = \frac{214}{900} = \frac{107}{450} \text{ и } 0{,}5(61) = \frac{561 - 5}{990} = \frac{556}{990} = \frac{278}{495}.$$

Теперь запишем данный пример в виде обыкновенных дробей и выполним действия: $\dfrac{\frac{107}{450} + \frac{43}{450}}{\frac{278}{495} - \frac{113}{495}}$.

1) $\frac{107}{450} + \frac{43}{450} = \frac{107 + 43}{450} = \frac{150}{450} = \frac{1}{3}$;

2) $\frac{278}{495} - \frac{113}{495} = \frac{278 - 113}{495} = \frac{165}{495} = \frac{1}{3}$;

3) $\frac{1}{3} : \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1} = 1.$

Итак, результатом выполненных действий является число 1.

4. Процент. Основные задачи на проценты

Процентом называют сотую часть любого числа или величины.

Пример 12

Найдите 1%: а) числа $7\frac{1}{3}$; б) величины $5 \cdot a$.

Решение

а) 1% числа $7\frac{1}{3}$ составляет число $7\frac{1}{3} : 100 = \frac{22}{3} : 100 = \frac{22}{300} = \frac{11}{150}$;

б) 1% величины $5 \cdot a$ составляет величину $5 \cdot a : 100 = \frac{5 \cdot a}{100} = \frac{a}{20}$.

Задачи на проценты можно решать путем составления пропорции. Если принять целое (b) за 100%, а его часть (a) – за P%, то получим пропорцию:

целое (b) – 100%;

часть (a) – P%.

Отсюда получаем $P = \frac{\text{часть}}{\text{целое}} \cdot 100\% = \frac{a}{b} \cdot 100\%$. Из этого равенства можно выразить любую его составляющую.

Пример 13

Из группы туристов, состоящей из 80 человек, 20 туристов отправились на рыбалку. Сколько процентов туристов отправилось на рыбалку?

Решение

Так как целое $b = 80$ (человек), часть $a = 20$ (рыбаков), то $P = \frac{a}{b} \cdot 100\% = \frac{20}{80} \cdot 100\% = 25\%$. Итак, на рыбалку отправилось 25% туристов.

Пример 14

При сушке фруктов испаряется 85% влаги. Сколько сухих фруктов получается из 200 кг свежих?

Решение

Так как при сушке испаряется 85% влаги, то в сухих фруктах сохраняется $100 - 85 = 15\%$ массы свежих фруктов. Таким образом, надо найти часть a (масса сухих фруктов), если известно целое b (масса свежих фруктов) и $P = 15\%$. Из соотношения $P = \frac{a}{b} \cdot 100\%$ выразим: $a = \frac{b \cdot P}{100} = \frac{200 \cdot 15}{100} = 30$ (кг).

Итак, из 200 кг свежих фруктов получается 30 кг сухих.

Пример 15

За первый день рабочий сделал 18 деталей, что составляет 20% всего задания. Сколько деталей должен сделать рабочий?

Решение

Надо найти целое (b), если известны часть ($a = 18$) и $P = 20\%$. Из равенства $P = \frac{a}{b} \cdot 100\%$ выразим: $b = \frac{a \cdot 100}{P} = \frac{18 \cdot 100}{20} = 90$ (деталей).

Итак, рабочий должен сделать 90 деталей.

IV. Задания на уроке

№ 1 (а, в, д, ж, и), 5 (б, г, е, ж), 7 (а, б), 17 (а, в).

V. Контрольные вопросы

– Запишите в виде десятичных дробей: $\frac{3}{25}$; $\frac{47}{40}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{79}{60}$; $2\frac{5}{18}$.

– Запишите в виде обыкновенных дробей или смешанных чисел: 0,36; 0,125; 5,015; 0,(3); 2,(63); 5,6(21).

– Как конечные десятичные дроби складываются (вычитаются, умножаются, делятся)? Какая десятичная дробь (конечная или бесконечная периодическая) будет результатом этих действий?

– Как выполнять действия над бесконечными периодическими десятичными дробями?

– Что называется процентом числа или величины?

– Как найти, сколько процентов P составляет число a от числа b?

VI. Творческие задания

1. Зарплата увеличилась сначала на 10%, а затем еще на 20%. На сколько процентов увеличилась зарплата по сравнению с первоначальной?

Решение

Пусть сначала зарплата составляла 100 у. е. Так как 1% величины 100 у. е. равен сотой части, т. е. $\frac{100}{100} = 1$ (у. е.), то 10% составляют величину, в 10 раз большую, т. е. $1 \cdot 10 = 10$ (у. е).

Следовательно, после первого повышения зарплата составляет $100 + 10 = 110$ (у. е.).

Рассмотрим второе повышение зарплаты. Так как 1% новой зарплаты в 110 у. е. равен сотой части, т. е. $\frac{110}{100} = 1{,}1$ (у. е.), то 20% составляют величину, в 20 раз большую, т. е. $1{,}1 \cdot 20 = 22$ (у. е.).

Следовательно, после второго повышения зарплата составляет $110 + 22 = 132$ (у. е.).

По сравнению с первоначальной зарплата увеличилась на $132 - 100 = 32$ (у. е.), что составляет от нее $\frac{32}{100} \cdot 100\% = 32\%$.

Таким образом, зарплата увеличилась на 32%.

Разумеется, вместо зарплаты, составляющей 100 у. е., можно было рассмотреть зарплату, составляющую a у. е. Легко убедиться, что процентное увеличение зарплаты не зависит от величины a.

2. Что больше – $a\%$ от числа b или $b\%$ от числа a?

Решение

Так как 1% от числа b равен $\frac{b}{100}$, то $a\%$ от этого числа составляют $a \cdot \frac{b}{100} = \frac{a \cdot b}{100}$. Так как 1% от числа a равен $\frac{a}{100}$, то $b\%$ от этого числа составляют $b \cdot \frac{a}{100} = \frac{b \cdot a}{100}$. Очевидно, что $\frac{a \cdot b}{100} = \frac{b \cdot a}{100}$.

Следовательно, $a\%$ от числа b равны $b\%$ от числа a.

3. Двое рабочих получали одинаковую зарплату. Зарплату первого рабочего сначала увеличили на 20%, а затем понизили на 20%. Зарплату второго рабочего, наоборот, сначала понизили на 20%, а затем увеличили на 20%. Какой рабочий стал получать больше? Как изменилась его зарплата по сравнению с первоначальной?

Решение

Пусть первоначально каждый из рабочих получал a у. е. Рассмотрим изменение зарплат рабочих.

Зарплата первого рабочего сначала увеличилась на 20%, т. е. на $\frac{a}{100} \cdot 20 = \frac{a}{5}$ (у. е.). В результате зарплата равна $a + \frac{a}{5} = \frac{6 \cdot a}{5}$ (у. е.). Затем эта зарплата уменьшилась на 20%, т. е. на $\frac{6a \cdot 20}{5 \cdot 100} = \frac{6a}{25}$ (у. е.). В итоге зарплата первого рабочего составляет $\frac{6 \cdot a}{5} - \frac{6 \cdot a}{25} = \frac{24 \cdot a}{25}$ (у. е.).

Зарплата второго рабочего сначала уменьшилась на 20%, т. е. на $\frac{a}{100} \cdot 20 = \frac{a}{5}$ (у. е.). В результате зарплата равна $a - \frac{a}{5} = \frac{4 \cdot a}{5}$ (у. е.). Затем эта зарплата увеличилась на 20%, т. е. на $\frac{4 \cdot a \cdot 20}{5 \cdot 100} = \frac{4 \cdot a}{25}$ (у. е.). В итоге зарплата второго рабочего составляет $\frac{4 \cdot a}{5} + \frac{4 \cdot a}{25} = \frac{24 \cdot a}{25}$ (у. е.).

Видно, что зарплаты рабочих стали одинаковыми и уменьшились по сравнению с первоначальной на $a - \frac{24 \cdot a}{25} = \frac{a}{25}$ (у. е.). Эта величина составляет $\frac{\frac{a}{25}}{a} \cdot 100 = 4\%$ от первоначальной, т. е. уменьшилась на 4%.

4. В первом бруске массой 10 кг содержится 50% меди, а во втором бруске массой 5 кг – 80% меди. Бруски сплавили. Сколько процентов меди содержится в новом сплаве?

Решение

Найдем 1% массы первого бруска: $\frac{10}{100} = 0{,}1$ (кг). Тогда масса меди в первом бруске составляет $0{,}1 \cdot 50 = 5$ (кг).

Найдем 1% массы второго бруска: $\frac{5}{100} = 0{,}05$ (кг). Тогда масса меди во втором бруске составляет $0{,}05 \cdot 80 = 4$ (кг).

Масса меди в новом сплаве составляет $5 + 4 = 9$ (кг) (так как медь в него попадет из первого и второго брусков). Масса нового сплава равна сумме масс первого и второго брусков, т. е. $10 + 5 = 15$ (кг).

Тогда в новом сплаве содержится

$\frac{\text{масса меди}}{\text{масса сплава}} \cdot 100\% = \frac{9}{15} \cdot 100 = 60\%$ (меди).

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 1 (б, г, е, з), 2, 3, 7 (в, г), 8, 17 (б, д).

Урок 3. Выражения с переменными

Цель: ознакомить с понятиями алгебраического выражения и его значения.

Планируемые результаты: усвоить понятия алгебраического выражения и его значения при заданных значениях переменных.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему задаиию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Выполните действия:

а) $(3{,}38 - 2{,}24) : 1{,}25$;

б) $\left(8\frac{7}{12} - 2\frac{17}{36}\right) \cdot 2{,}7 - 4\frac{1}{3} : 0{,}65$.

2. В сплаве цинка и свинца массой 1600 г содержится 25% свинца. Установите:

а) массу цинка и массу свинца в сплаве (в граммах);

б) сколько процентов цинка в сплаве;

в) какой процент составляет масса свинца от массы цинка.

Вариант 2

1. Выполните действия:

а) $(6{,}33 - 3{,}21) : 3{,}75$;

б) $\left(6\frac{8}{15} - 4\frac{21}{45}\right) \cdot 4{,}5 - 2\frac{1}{6} : 0{,}52$.

2. В сплаве меди и олова массой 1400 г содержится 30% олова. Установите:

а) массу меди и массу олова в сплаве (в граммах);

б) сколько процентов меди в сплаве;

в) какой процент составляет масса олова от массы меди.

III. Работа по теме урока

План урока

1. Выражение с переменными.
2. Значение выражения с переменными.

1. Выражение с переменными

Сначала рассмотрим несколько примеров.

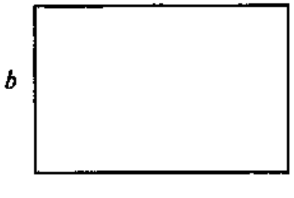
Пример 1

Один диск стоит 230 руб. Тогда два таких диска стоят в два раза больше, т. е. $230 \cdot 2 = 460$ руб.; пять дисков стоят в пять раз больше, т. е. $230 \cdot 5 = 1150$ руб.; a дисков стоят в a раз дороже, т. е. $230 \cdot a$ руб. С помощью выражения $230 \cdot a$ можно находить стоимость различного числа дисков, подставляя различные значения a и выполняя умножение.

Так как буква a может принимать различные натуральные значения, то ее называют переменной, а выражение $230 \cdot a$ – выражением с переменной (или алгебраическим выражением).

Пример 2

Пусть длина одной стороны прямоугольника a см, другой стороны – b см. Найдем периметр прямоугольника.



Так как противоположные стороны прямоугольника равны, то длина двух меньших сторон $2 \cdot a$ см, длина двух больших сторон $2 \cdot b$ см.

Тогда периметр (сумма длин всех сторон) прямоугольника равен $2 \cdot a + 2 \cdot b$ (см). Используя алгебраическое выражение $2 \cdot a + 2 \cdot b$, можно находить периметр прямоугольника со сторонами a см и b см. Буквы a и b могут принимать различные положительные значения и называются переменными.

Пример 3

Поезд двигался 2 ч со скоростью v_1 км/ч и 3 ч со скоростью v_2 км/ч. Найдем среднюю скорость движения поезда.

По определению средняя скорость движения – отношение всего пройденного пути ко времени, затраченного на этот путь. За первые два часа поезд, двигаясь со скоростью v_1 км/ч, прошел расстояние $2 \cdot v_1$ (км). За следующие три часа поезд, двигаясь со скоростью v_2 км/ч, прошел расстояние $3 \cdot v_2$ (км).

Таким образом, было пройдено расстояние $2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2$ (км), на которое было затрачено $2 + 3 = 5$ (ч). Тогда по определению средняя скорость поезда равна $\frac{2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2}{5}$ (км/ч).

Вновь получили алгебраическое выражение $\frac{2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2}{5}$ с переменными v_1 и v_2.

Таким образом, в различных алгебраических, геометрических и физических задачах появляются *выражения с переменными* (или алгебраические выражения). Возникновение таких выражений *подобно возникновению числовых выражений*. Поэтому многие понятия у числовых и алгебраических выражений аналогичны.

Запись, составленная из букв и чисел с помощью арифметических действий и скобок, называется алгебраическим выражением. Буквы, входящие в выражение, называются *переменными*.

Пример 4

а) Запись $2 \cdot a^2 - 3 \cdot b^3 + 5$ – алгебраическое выражение с переменными a и b;

б) запись $\frac{(3 \cdot x - 2) \cdot y}{x + y}$ – алгебраическое выражение с переменными x и y.

2. Значение выражения с переменными

Значение числового выражения, которое получается при подстановке выбранных значений переменных в алгебраическое выражение, называют значением алгебраического выражения (выражения с переменными).

Пример 5

Найдем значение выражения $\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{c}$ при $a = 3$, $b = 4$ и $c = 2$. В указанное алгебраическое выражение $\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{c}$ подставим данные значения переменных $a = 3$, $b = 4$ и $c = 2$. Получаем числовое выражение. Выполнив действия, найдем его значение: $\frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{2} = \frac{6 + 12}{2} = \frac{18}{2} = 9$. Это число является значением алгебраического выражения для данных значений переменных.

IV. Задания на уроке

№ 31, 33, 35, 36, 38 (а, б, г), 20, 22, 26 (а).

V. Контрольные вопросы

– Чем различаются числовые и алгебраические выражения?
– Что называется алгебраическим выражением и переменной?
– Как вычислить значение алгебраического выражения при данных значениях переменных? Всегда ли это можно сделать?

VI. Творческие задания

1. Первое положительное число увеличили на 10%, второе положительное число – на 50%. Может ли сумма этих чисел увеличиться на 30%?

Решение

Пусть первое число x, второе – y. Сумма этих чисел $x + y$. После увеличения

первое число равно: $x + \frac{x}{100} \cdot 10 = x + 0{,}1 \cdot x = 1{,}1 \cdot x$;

второе число равно: $y + \frac{y}{100} \cdot 50 = y + 0{,}5 \cdot y = 1{,}5 \cdot y$.

Тогда сумма этих чисел равна $1{,}1 \cdot x + 1{,}5 \cdot y$. По условию эта величина равна первоначальной сумме, увеличенной на 30%, т. е.:

$$(x + y) + \frac{x + y}{100} \cdot 30 = (x + y) + 0{,}3 \cdot (x + y) = 1{,}3 \cdot (x + y) =$$

$$= 1{,}3 \cdot x + 1{,}3 \cdot y.$$

Получаем равенство:
$1{,}1 \cdot x + 1{,}5 \cdot y = 1{,}3 \cdot x + 1{,}3 \cdot y$,
$1{,}5y - 1{,}3y = 1{,}3x - 1{,}1x$,
$0{,}2y = 0{,}2x$,
откуда $x = y$.

Таким образом, условия задачи выполнены, если первоначальные числа равны.

2. Докажите на примере трехзначного числа признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9.

Решение

Пусть трехзначное число состоит из a сотен, b десятков и c единиц. Тогда его можно записать в виде $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$. Теперь рассмотрим делимость этого числа на перечисленные числа 2, 3, 4, 5, 9.

а) Число делится на 2, если его последняя цифра четная или 0. В данном числе $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ первые два слагаемых $100 \cdot a$ и $10 \cdot b$ при всех a и b делятся на 2. Поэтому, чтобы данное число делилось на 2, надо, чтобы и последнее слагаемое c делилось на 2. Таким образом, последняя цифра данного числа четная или нуль.

б) Число делится на 3 (9), если сумма его цифр делится на 3 (9). В данном числе $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ выделим слагаемые, которые делятся на 3 (9), т. е. запишем число в виде $(99 \cdot a + 9 \cdot b) + (a + b + c)$. Каждое слагаемое в первых скобках делится на 3 (9). Чтобы данное число делилось на 3 (9), надо, чтобы и последнее слагаемое $a + b + c$ делилось на 3 (9). Смысл этого слагаемого – сумма цифр данного числа.

в) Число делится на 4, если двузначное число $10 \cdot b + c$, образованное двумя последними цифрами, делится на 4. В данном числе $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ первое слагаемое $100 \cdot a$ делится на 4. Чтобы число делилось на 4, надо, чтобы и выражение $10 \cdot b + c$ делилось на 4. Смысл выражения $10 \cdot b + c$ – двузначное число, образованное двумя последними цифрами данного числа.

г) Число делится на 5, если его последняя цифра 0 или 5. В данном числе $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ первые два слагаемых делятся на 5 при любых a и b. Поэтому необходимо, чтобы и число c делилось на 5.

Так как c – последняя цифра числа, то c может принимать значения или 0, или 5.

3. При каком значении цифры X шестизначное число $3X54XX$ делится на 2, 3, 4, 5, 9?

4. При каком значении цифр X и Y шестизначное число $2X541Y$ делится на 12, 15, 18, 20?

(*Указание:* разложить делители на взаимно простые множители: $12 = 3 \cdot 4$; $15 = 3 \cdot 5$; $18 = 2 \cdot 9$; $20 = 4 \cdot 5$ – и использовать соответствующие признаки делимости.)

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 32, 34, 37, 38 (в, д, е, ж, з), 21, 23, 26 (в).

Урок 4. Допустимые значения переменных в выражениях. Формулы

Цель: сформировать представление о допустимых значениях переменных в алгебраических выражениях и о формулах.

Планируемые результаты: научиться находить допустимые значения переменных в выражениях; иметь представление о простейших формулах.

Тип урока: урок-практикум.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Что называется алгебраическим выражением и переменной?

2. Было закуплено 5 телевизоров стоимостью a руб., 7 приемников стоимостью b руб. и 8 магнитофонов стоимостью c руб. Напишите алгебраическое выражение для вычисления стоимости покупки и найдите его значение при $a = 8200$, $b = 2100$ и $c = 4300$.

3. Найдите значение выражения $2x + 3y - z$, если $x + y = 3$ и $y - z = 2$.

Вариант 2

1. Как вычислить значение алгебраического выражения при данных значениях переменных?

2. Было закуплено 7 телевизоров стоимостью a руб., 6 приемников стоимостью b руб. и 5 магнитофонов стоимостью c руб. Напишите алгебраическое выражение для вычисления стоимости покупки и найдите его значение при $a = 8300$, $b = 2200$ и $c = 4100$.

3. Найдите значение выражения $3x - 4y - z$, если $x - y = 5$ и $y + z = 3$.

III. Работа по теме урока

План урока

1. Допустимые значения переменных в выражениях.
2. Простейшие формулы.
3. Деление натуральных чисел.

1. Допустимые значения переменных в выражениях

(Учащиеся с помощью наводящих вопросов сравнивают выражения из примера 1.)

Пример 1

Сравним два алгебраических выражения:

а) $a^2 - a \cdot b + b^3$; б) $\frac{a^2 - a \cdot b + b^3}{a - 3}$.

В первом выражении с переменными a и b выполняются следующие операции: возведение в степень, умножение, сложение, вычитание. Все эти действия можно выполнить *с любыми числами* (или ***при любых значениях переменных a и b***). Поэтому выражение *а* имеет смысл при любых значениях a и b (или допустимыми значениями для выражения ***а являются любые значения переменных a*** и ***b***). В выражении *б*, помимо упомянутых операций, есть еще одно действие – деление на выражение $a - 3$. Такая операция выполнима, только если делитель $a - 3$ не равен нулю (так как делить на нуль нельзя), т. е. $a - 3 \neq 0$, откуда $a \neq 3$. Поэтому при любых значениях переменной b и значениях $a \neq 3$ выражение *б* имеет смысл, а при $a = 3$ не имеет смысла. Следовательно, ***допустимые значения*** переменных a и b для выражения *б* – ***любые значения b и a, кроме a = 3*** (т. е. $a \neq 3$).

Значения переменных, при которых данное выражение имеет смысл (или выполнимы все действия с этими переменными), называются допустимыми значениями переменных в алгебраическом выражении.

Пример 2

Найдем допустимые значения переменных в алгебраических выражениях:

а) $3 \cdot x^3 - 2 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2$; в) $\frac{2 \cdot x^2 - 5 \cdot y}{x - y}$;

б) $\frac{2 \cdot x^2 - 5 \cdot y}{x - 2}$; г) $\frac{3 \cdot x}{x + 1} - \frac{y^2}{y - 2}$.

а) В выражении с переменными x и y выполняются следующие операции: возведение в степень, умножение, вычитание и сложение. Такие действия выполнимы при любых значениях x и y. Поэтому допустимые значения переменных – любые значения x и y.

б) В выражении с переменными x и y выполняются следующие операции: возведение в степень, умножение, вычитание и деление на величину $x - 2$. Это действие возможно, если делитель $x - 2 \neq 0$, т. е. $x \neq 2$. Поэтому допустимые значения переменных – любые значения y и любые $x \neq 2$.

в) В выражении, помимо других операций, есть и деление на величину $x - y$. Такое действие возможно, если делитель $x - y \neq 0$, т. е. $x \neq y$. Поэтому допустимые значения переменных –

любые значения x и y, кроме $x \neq y$ (например, $x = 5$ и $y = 3$ – допустимые значения переменных, $x = 5$ и $y = 5$ – недопустимые значения).

г) В выражении присутствует деление на величины $x + 1$ и $y - 2$. Такие операции возможны, если делители $x + 1 \neq 0$ и $y - 2 \neq 0$, откуда $x \neq -1$ и $y \neq 2$. Поэтому допустимые значения переменных – любые значения $x \neq -1$ и любые значения $y \neq 2$.

2. Простейшие формулы

Равенство, обе части которого являются алгебраическими выражениями, называется формулой.

Пример 3

а) $P = 2 \cdot (a + b)$ – формула периметра прямоугольника (где P – периметр, a и b – длины сторон прямоугольника);

б) $S = a \cdot b$ – формула площади прямоугольника (где S – площадь);

в) $m = 3 \cdot n$ – формула числа, кратного 3 (где m – число, кратное 3, n – любое целое число);

г) $s = v \cdot t$ – формула пройденного пути при равномерном движении (где s – пройденный путь, v – скорость движения, t – время движения);

д) $v = \frac{s}{t}$ – формула средней скорости (где v – средняя скорость, s – пройденный путь, t – время, затраченное на этот путь).

3. Деление натуральных чисел

Остановимся на делении натуральных чисел более подробно, так как с этим понятием связано много задач.

Пример 4

а) Число 28 без остатка делится на 7, и в частном получается число 4. Тогда число 28 можно представить так: $28 = 7 \cdot 4$, т. е. делимое = делитель · частное.

б) Число 36 без остатка делится на 3, и в частном получается число 12. Тогда число 36 можно представить в том же виде: $36 = 3 \cdot 12$, т. е. делимое = делитель · частное.

(Следует обобщить результаты решения этого примера с помощью учащихся.)

Если число m без остатка делится на число p и в частном получается число n, то его можно представить так: $m = p \cdot n$, т. е. делимое = делитель · частное.

Пример 5

а) Запишем формулу числа, кратного 5: $m = 5 \cdot n$, так как 5 – делитель, n – некоторое частное (n – целое число).

б) Запишем формулу числа, кратного 13: $m = 13 \cdot n$, так как 13 – делитель, n – некоторое частное (n – целое число).

Если в эти формулы подставлять различные натуральные числа n, то будем получать числа m, кратные 5 или 13.

Пример 6

Докажем, что сумма и разность двух чисел, кратных 7, также кратны 7.

Первое число m_1, кратное 7, запишем в виде $m_1 = 7 \cdot n_1$ (где n_1 – некоторое частное), второе число m_2, кратное 7, запишем в виде $m_2 = 7 \cdot n_2$ (где n_2 – частное). Найдем сумму чисел m_1 и m_2 и получим $m_1 + m_2 = 7 \cdot n_1 + 7 \cdot n_2$. Это выражение можно записать в виде $m_1 + m_2 = 7 \cdot (n_1 + n_2)$. Такая запись означает, что число $m_1 + m_2$ делится на 7 и в частном получается число $n_1 + n_2$, т. е. сумма чисел m_1 и m_2 кратна 7.

Аналогично найдем разность чисел m_1 и m_2 и получим $m_1 - m_2 = 7 \cdot n_1 - 7 \cdot n_2$. Это выражение запишем в виде $m_1 - m_2 = 7 \cdot (n_1 - n_2)$. Такая запись означает, что число $m_1 - m_2$ делится на 7 и в частном получается число $n_1 - n_2$, т. е. разность чисел m_1 и m_2 кратна 7.

Обсудим теперь деление натуральных чисел с остатком.

Пример 7

а) Число 28 делится на число 9 с остатком. При этом в частном получается 3 и в остатке 1. Тогда число 28 можно представить в виде $28 = 9 \cdot 3 + 1$, т. е. делимое = делитель · частное + + остаток (при этом остаток меньше делителя).

б) Число 46 делится на число 8 с остатком. При этом в частном получается 5 и в остатке 6. Тогда число 46 можно записать в виде $46 = 8 \cdot 5 + 6$, т. е. делимое = делитель · частное + остаток (при этом остаток меньше делителя).

(Следует обобщить результаты решения этого примера с помощью учащихся.)

Если число m делится на число p и в частном получается число n, а в остатке – число r, то его можно представить в виде $m = p \cdot n + r$ (где $r < p$), т. е. делимое = делитель · частное + остаток (при этом остаток меньше делителя).

Пример 8

а) Запишем формулу нечетного числа: $m = 2 \cdot n + 1$ (где n – некоторое частное), так как нечетное число при делении на 2 дает остаток 1.

б) Запишем формулу числа, которое при делении на 7 дает остаток 3: $m = 7 \cdot n + 3$ (где n – некоторое частное).

Пример 9

При делении на 8 два числа дают остаток 5. Найдите остаток при делении на 8 суммы и разности этих чисел.

Данные числа m_1 и m_2 можно записать так: $m_1 = 8 \cdot n_1 + 5$ и $m_2 = 8 \cdot n_2 + 5$ (где n_1 и n_2 – некоторые частные). Найдем сумму этих чисел: $m_1 + m_2 = 8 \cdot n_1 + 8 \cdot n_2 + 10$. Так как рассматривается деление на 8, то число 10 представим в виде суммы двух чисел, одно из которых кратно 8, т. е. $10 = 8 + 2$. Тогда число $m_1 + m_2$ запишем в виде $m_1 + m_2 = 8 \cdot n_1 + 8 \cdot n_2 + 8 + 2 = 8(n_1 + n_2 + 1) + 2$. Эта запись означает, что при делении на 8 числа $m_1 + m_2$ в частном получается число $n_1 + n_2 + 1$, а в остатке – число 2.

Найдем разность данных чисел: $m_1 - m_2 = 8 \cdot n_1 + 5 - 8 \cdot n_2 - 5 = 8 \cdot n_1 - 8 \cdot n_2$. Представим разность в виде $m_1 - m_2 = 8 \cdot (n_1 - n_2)$. Эта запись означает, что число $m_1 - m_2$ кратно 8 (при этом в частном получается $n_1 - n_2$), т. е. остаток равен 0.

IV. Задания на уроке

№ 39, 41 (в), 42.

1. Напишите формулу числа, которое при делении на 5 дает остаток:

а) 0; б) 2; в) 3.

По этой формуле найдите любое:

а) однозначное число;

б) двузначное число;

в) трехзначное число.

2. Напищите формулу числа, которое при делении на 11 дает остаток:

а) 3; б) 7; в) 10.

По этой формуле найдите три любых двузначных числа.

3. Докажите, что сумма и разность двух нечетных чисел является числом четным.

V. Контрольные вопросы

– Какие значения переменных в алгебраическом выражении называются допустимыми?

– Найдите допустимые значения переменных в выражениях:

а) $3 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b - b$; в) $2 \cdot a + \frac{b+1}{a-1} + \frac{b-3}{a+2}$;

б) $2 \cdot a + \frac{3 \cdot b}{a-2}$; г) $2 \cdot a + 3 \cdot b^2 + \frac{a}{a - 2 \cdot b}$.

– Какое равенство называется формулой? Приведите примеры.

– Напишите формулу числа, кратного числу p.

– Напишите формулу числа, которое при делении на число p дает остаток r.

VI. Творческие задания

1. На примере двух чисел, кратных числу n, докажите, что их сумма, разность и произведение также кратны числу n.

Решение

Пусть числа m_1 и m_2 кратны числу n. Тогда их можно записать в виде $m_1 = n \cdot a_1$ и $m_2 = n \cdot a_2$ (где a_1 и a_2 — некоторые частные). Рассмотрим сумму чисел m_1 и m_2 и получим $m_1 + m_2 = n \cdot a_1 + n \cdot a_2 = n \cdot (a_1 + a_2)$. Эта запись означает, что число $m_1 + m_2$ делится на n (при этом в частном получается число $a_1 + a_2$), т. е. сумма данных чисел m_1 и m_2 кратна n.

Найдем разность чисел $m_1 - m_2$: $n \cdot a_1 - n \cdot a_2 = n \cdot (a_1 - a_2)$. Из этой записи следует, что разность данных чисел кратна n (при этом в частном получается число $a_1 - a_2$).

Рассмотрим произведение данных чисел m_1 и m_2 и получим $m_1 \cdot m_2 = n \cdot a_1 \cdot n \cdot a_2$. Эта запись означает, что число $m_1 \cdot m_2$ делится на n (при этом в частном получается число $a_1 \cdot n \cdot a_2$), т. е. произведение данных чисел m_1 и m_2 кратно n. Вообще говоря, из приведенной записи следует, что произведение данных чисел m_1 и m_2 кратно даже n^2.

2. Два числа при делении на число n дают одинаковый остаток. Докажите, что разность данных чисел кратна числу n.

Решение

Даны числа m_1 и m_2, которые при делении на число n дают одинаковый остаток r. Тогда их можно записать в виде $m_1 = n \cdot a_1 + r$ и $m_2 = n \cdot a_2 + r$ (где a_1 и a_2 — некоторые частные). Найдем разность данных чисел: $m_1 - m_2 = n \cdot a_1 + r - (n \cdot a_2 + r) = n \cdot a_1 + r - n \cdot a_2 - r = n \cdot a_1 - n \cdot a_2 = n \cdot (a_1 - a_2)$. Эта запись означает, что число $n \cdot (a_1 - a_2)$ кратно n (при делении получается частное $a_1 - a_2$). Следовательно, разность данных чисел кратна n.

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 40, 41 (б), 43.

1. Найдите допустимые значения переменных в выражениях:

а) $2 \cdot a - 3 \cdot a \cdot b + 3 \cdot b^2$;

б) $3 \cdot a^2 + \dfrac{2 \cdot a + 1}{a - 5}$;

в) $6 \cdot a + \dfrac{3 \cdot a}{a + 1} - \dfrac{2 \cdot a + 1}{a - 3} + a^2$;

г) $2 \cdot a^2 + 3 \cdot a \cdot b - \dfrac{a + b}{a - b}$.

2. Напишите формулу числа, кратного 17. По этой формуле найдите любое:

а) двузначное число;

б) трехзначное число.

3. Напишите формулу числа, которое при делении на 7 дает остаток:

а) 0; б) 2; в) 5.

По этой формуле найдите любое:

а) однозначное число;

б) двузначное число;

в) трехзначное число.

Урок 5. Сравнение значений выражений

Цель: сформировать представление о сравнении значений числовых и алгебраических выражений, о неравенствах.

Планируемые результаты: научиться сравнивать числа; иметь представление о числовых неравенствах.

Тип урока: урок-исследование.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Укажите допустимые значения переменных для выражения $\frac{2x-7y+2}{(x+3)(y-2)}$.

Варианты ответа: а) $x \neq 3$, $y \neq 2$; б) $x \neq -3$, $y \neq 2$; в) $x \neq -3$, $y \neq -2$.

2. Напишите формулу числа, которое при делении на 6 дает остаток 4.

Варианты ответа: а) $6n - 4$; б) $4n + 6$; в) $6n + 4$.

3. Число a при делении на 7 дает остаток 4. Найдите остаток от деления числа $5a$ на 7.

Варианты ответа: а) 4; б) 3; в) 6.

Вариант 2

1. Укажите допустимые значения переменных для выражения $\frac{3x-4y-1}{(x-5)(y+3)}$.

Варианты ответа: а) $x \neq 5$, $y \neq -3$; б) $x \neq 5$, $y \neq 3$; в) $x \neq -5$, $y \neq -3$.

2. Напишите формулу числа, которое при делении на 8 дает остаток 5.

Варианты ответа: а) $8n - 5$; б) $5n + 8$; в) $8n + 5$.

3. Число a при делении на 9 дает остаток 3. Найдите остаток от деления числа $4a$ на 9.

Варианты ответа: а) 5; б) 3; в) 6.

III. Работа по теме урока

План урока

1. Сравнение значений выражений.
2. Числовые неравенства.

1. Сравнение значений выражений

Пример 1

Сравним значения числовых выражений $(3^2 - 4) : 5$ и $(2^2 + 6) : 8$. Прежде всего, найдем эти значения: $(3^2 - 4) : 5 = (9 - 4) : 5 = 5 : 5 = 1$ и $(2^2 + 6) : 8 = (4 + 6) : 8 = 10 : 8 = 1{,}25$. Очевидно, что число 1,25 больше числа 1. Этот результат можно записать в виде неравенства $1{,}25 > 1$ или $(2^2 + 6) : 8 > (3^2 - 4) : 5$.

Вывод: *для любых двух числовых выражений* можно установить, равны ли они или какое из них больше, т. е. *сравнить их*. Результат сравнения значений числовых выражений обычно записывают в виде равенства или неравенства.

При сравнении значений алгебраических выражений при разных значениях переменных результат может оказаться как различным, так и одинаковым.

Пример 2

Сравним значения алгебраических выражений $2 \cdot a - 3$ и $6 - a$ при $a = 1, 3, 5$. Прежде всего, найдем эти значения.

При $a = 1$ получаем $2 \cdot a - 3 = -1$ и $6 - a = 5$. Тогда при $a = 1$ верно неравенство $2 \cdot a - 3 < 6 - a$.

При $a = 3$ получаем $2 \cdot a - 3 = 3$ и $6 - a = 3$. Тогда при $a = 3$ верно равенство $2 \cdot a - 3 = 6 - a$.

При $a = 5$ получаем $2 \cdot a - 3 = 7$ и $6 - a = 1$. Тогда при $a = 5$ верно неравенство $2 \cdot a - 3 > 6 - a$.

Пример 3

При всех значениях переменной a верны сравнения:

а) $(a - 2)^2 = a^2 - 4 \cdot a + 4$;

б) $a^2 + 5 > 4 \cdot a$;

в) $4 \cdot a + 2 < a^2 + 7$.

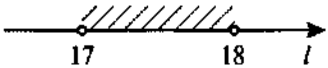
Пока доказать эти сравнения мы не можем, но можно их проверить, например при $a = 0, 3, 5$.

2. Числовые неравенства

Иногда необходимо установить, между какими числами (в каких пределах) заключено значение выражения.

Пример 4

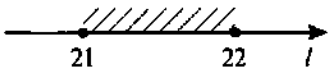
При измерении отрезка обнаружили, что его длина больше 17 см и меньше 18 см. Обозначим длину отрезка (в сантиметрах) буквой l. Тогда результат измерения можно записать в виде неравенств $l > 17$ и $l < 18$ или $17 < l$ и $l < 18$. Эти неравенства можно объединить в виде двойного неравенства $17 < l < 18$. Данное неравенство читают так: «l больше 17 и меньше 18». Числа l, удовлетворяющие неравенству $17 < l < 18$, можно изобразить на координатной прямой. Любое число l, расположенное на заштрихованном промежутке, удовлетворяет неравенству (границы промежутка не включаются).



Пример 5

Измерения длины отрезка показали, что она больше или равна (также говорят: «не меньше») 21 см и меньше или равна (говорят: «не больше») 22 см. Результат измерений можно записать в виде неравенств: $l \geq 21$ и $l \leq 22$ или $21 \leq l$ и $l \leq 22$. Эти неравенства можно объединить в виде двойного неравенства $21 \leq l \leq 22$. Это неравенство читают так: «l больше или равно 21 и меньше или равно 22».

Числа l, удовлетворяющие неравенству $21 \leq l \leq 22$, можно изобразить на координатной прямой. Любое число l, расположенное на заштрихованном промежутке, удовлетворяет неравенству (границы промежутка включаются).



Неравенства, составленные *с помощью знаков* $>$ *и* $<$, называют *строгими неравенствами*.

Неравенства, составленные *с помощью знаков* $\geq$ *и* $\leq$, называют *нестрогими неравенствами*.

Нестрогое неравенство является верным, если выполнено или строгое неравенство, или равенство.

Пример 6

Числовые неравенства $2{,}1 \leq 2{,}1$; $0{,}8 \leq 3{,}2$; $6{,}4 \geq 6{,}4$; $5{,}6 \geq 2{,}8$ являются верными.

IV. Задания на уроке

№ 47 (а, в), 48 (а, в), 49 (а), 51 (а), 52 (а), 55 (а, д), 56 (а, в, д), 57 (а, б), 58 (а, г), 62 (а, г), 63 (в).

V. Контрольные вопросы

- Как сравниваются числовые выражения?
- Всегда ли можно сказать, что одно числовое выражение больше другого или равно ему?

– Как можно сравнить алгебраические выражения?
– Может ли одно алгебраическое выражение быть больше другого или равно ему при всех значениях переменной? Приведите примеры.

VI. Творческие задания

Сравните выражения (не вычисляя их значений):

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$ (первое выражение больше, так как каждое слагаемое в нем больше соответствующего слагаемого во втором выражении: $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}>\frac{1}{5}$ и т. д.);

б) $\frac{1}{101}+\frac{2}{103}+\frac{3}{105}+\frac{4}{107}+\frac{5}{109}$ и $\frac{1}{100}+\frac{2}{102}+\frac{3}{104}+\frac{4}{106}+\frac{5}{108}$ (второе выражение больше, так как каждое слагаемое в нем больше соответствующего слагаемого в первом выражении: $\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$, $\frac{2}{103}<\frac{2}{102}$, $\frac{3}{105}<\frac{3}{104}$ и т. д.);

в) $a+a^2+a^3$ и $\left(a^2-\frac{1}{2}\right)+\left(a^2-\frac{1}{3}\right)+\left(a^3-\frac{1}{4}\right)$ (первое выражение больше, так как каждое слагаемое в нем больше соответствующего слагаемого во втором выражении: $a>a-\frac{1}{2}$, $a^2>a^2-\frac{1}{3}$, $a^3>a^3-\frac{1}{4}$ при любых значениях переменной a);

г) $a+a^2+a^3$ и $(a-1)+(a^2-2)+(a^3+3)$ (выражения равны, так как во второе выражение входит первое, а сумма чисел -1, -2 и $+3$ равна 0).

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 47 (б, г), 48 (б, г), 49 (б), 51 (б), 52 (б), 55 (б, в, е), 56 (б, г, е), 57 (в, г), 58 (б, в, е), 62 (б, в), 63 (г).

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

Урок 6. Свойства действий над числами

Цель: напомнить основные свойства сложения и умножения.

Планируемые результаты: усвоить основные свойства действий над числами.

Тип урока: урок изучения нового материала.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

Напомним *основные свойства* операций сложения и умножения чисел.

1. *Переместительное свойство*: $a + b = b + a$ и $a \cdot b = b \cdot a$ (для любых чисел a и b). *От перестановки слагаемых сумма чисел не меняется. От перестановки множителей произведение чисел не меняется.*

Пример 1

На основании переместительного свойства выполняются равенства:

а) $3\frac{1}{7} + 2{,}6 = 2{,}6 + 3\frac{1}{7}$; в) $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$;

б) $3\frac{1}{7} \cdot 2{,}6 = 2{,}6 \cdot 3\frac{1}{7}$; г) $a^2 \cdot b^2 = b^2 \cdot a^2$.

Разумеется, это *свойство справедливо* не только для двух чисел, но и *для любого количества слагаемых или множителей.*

Пример 2

На основании переместительного свойства выполняются равенства:

а) $3\frac{1}{7} + 2{,}6 + 1{,}5 = 3\frac{1}{7} + 1{,}5 + 2{,}6 = 2{,}6 + 3\frac{1}{7} + 1{,}5 = 2{,}6 + 1{,}5 + 3\frac{1}{7} = 1{,}5 + 3\frac{1}{7} + 2{,}6 = 1{,}5 + 2{,}6 + 3\frac{1}{7}$;

б) $a \cdot b^2 \cdot c^3 = a \cdot c^3 \cdot b^2 = b^2 \cdot a \cdot c^3 = b^2 \cdot c^3 \cdot a = c^3 \cdot b^2 \cdot a = c^3 \cdot a \cdot b^2$.

2. *Сочетательное свойство*: $(a + b) + c = a + (b + c)$ и $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (для любых чисел a, b и c).

При сложении или умножении чисел их можно произвольным образом объединить в группы.

Пример 3

На основании сочетательного свойства выполняются равенства:

а) $\left(3\frac{1}{7} + 2{,}6\right) + 1{,}5 = 3\frac{1}{7} + (2{,}6 + 1{,}5) = 2{,}6 + (3\frac{1}{7} + 1{,}5)$;

б) $(a^2 \cdot b^2) \cdot c = a^2 \cdot (b^2 \cdot c) = b^2 \cdot (a^2 \cdot c)$.

Это *свойство* также *справедливо для любого количества чисел.* Переместительное и сочетательное свойства часто используются *для* наиболее *рационального сложения или умножения чисел.*

Пример 4

Вычислим наиболее рациональным способом:

а) $3{,}17 + 6{,}2 + 1{,}83 + 3{,}8 = 3{,}17 + 1{,}83 + 6{,}2 + 3{,}8 = (3{,}17 + 1{,}83) + (6{,}2 + 3{,}8) = 5 + 10 = 15$;

б) $2\frac{3}{7} \cdot 5 \cdot \frac{14}{17} = 2\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{17} \cdot 5 = \left(2\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{17}\right) \cdot 5 = \left(\frac{17}{7} \cdot \frac{14}{17}\right) \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10$.

3. *Распределительное свойство*: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (для любых чисел a, b и c). *При умножении числа на сумму чисел данный множитель умножается на каждое слагаемое и полученные произведения складываются.*

Пример 5

На основании распределительного свойства выполняются равенства:

а) $2{,}3 \cdot \left(5{,}1 + 2\frac{1}{3}\right) = 2{,}3 \cdot 5{,}1 + 2{,}3 \cdot 2\frac{1}{3}$;

б) $a^2 \cdot (b^2 + c) = a^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot c$.

Распределительное *свойство справедливо* и в том случае, когда в сумму входит *любое число слагаемых*.

Пример 6

Справедливо равенство $a \cdot (b + c^2 + d) = a \cdot b + a \cdot c^2 + a \cdot d$.

Распределительное свойство также используется для рациональных вычислений выражений.

Пример 7

Вычислим рациональным способом:

$$18 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{9}\right) = 18 \cdot \frac{1}{3} + 18 \cdot 1\frac{1}{2} + 18 \cdot 2\frac{1}{9} = 18 \cdot \frac{1}{3} + 18 \cdot \frac{3}{2} + $$

$$+ 18 \cdot \frac{19}{9} = 6 + 9 \cdot 3 + 2 \cdot 19 = 6 + 27 + 38 = 71.$$

Заметим, что *операцию вычитания можно заменить операцией сложения*, прибавив к уменьшаемому число, противоположное вычитаемому, т. е. $a - b = a + (-b)$. Поэтому вычитание можно считать алгебраической суммой чисел. Разумеется, переместительное, сочетательное и распределительное *свойства справедливы* и в этом случае.

Пример 8

Используя переместительное, сочетательное и распределительное свойства, вычислим:

$$2\frac{1}{3} \cdot \left(1\frac{2}{3} - 2{,}3 + 6\frac{1}{3} - 2{,}7\right) = 2\frac{1}{3} \cdot \left(1\frac{2}{3} + 6\frac{1}{3} - 2{,}3 - 2{,}7\right) =$$

$$= 2\frac{1}{3} \cdot \left(\left(1\frac{2}{3} + 6\frac{1}{3}\right) + (-2{,}3 - 2{,}7)\right) = 2\frac{1}{3} \cdot (8 + (-5)) = 2\frac{1}{3} \cdot (8 - 5) =$$

$$= \frac{7}{3} \cdot 3 = 7.$$

III. Задания на уроке

№ 70 (а, в), 71 (а, в), 72 (а, г), 73 (а), 74 (а), 75 (а, г), 76 (а, в), 77 (а), 78 (а), 79 (а).

IV. Контрольные вопросы

– Запишите формулировки основных свойств сложения и умножения.
– Дайте словесную формулировку свойств сложения и умножения.
– Для каких чисел справедливы основные свойства сложения и умножения?

V. Творческие задания

1. Проверьте равенства:

а) $a - b + c - d = (a + c) - (b + d)$;

б) $(a - 1) + (1 + b) + (c - 1) + (1 + d) = a + b + c + d$;

в) $(a - 1) + (1 - b) + (c - 1) + (1 - d) = a - b + c - d$;

г) $a \cdot (b + c) + a \cdot d = a \cdot (b + c + d)$;

д) $(a - 4) \cdot (b + c) = (a - 4) \cdot b + (a - 4) \cdot c = a \cdot b - 4 \cdot b + a \cdot c - 4 \cdot c$.

Какие свойства сложения и умножения при этом использовали?

2. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $3 + 5 + 8 + 9 + 17 + 15 + 12 + 11$ (*ответ:* 80);

б) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 9 + 18 + 27 + 36 + 45$ (*ответ:* 150);

в) $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \ldots + \frac{7}{9} + \frac{8}{9}$ (*ответ:* 4);

г) $\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \ldots + \frac{17}{20} + \frac{18}{20} + \frac{19}{20}$ (*ответ:* 9,5);

д) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 99 - 100$ (*ответ:* –50);

е) $(1 + 3 + 5 + \ldots + 99) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 98 + 100)$ (*ответ:* –50).

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 70 (б, г), 71 (б, г), 72 (б, в), 73 (б), 74 (б), 75 (б, в), 76 (б, г), 77 (б), 78 (б), 79 (б).

Урок 7. Тождества

Цель: сформировать представление о тождественно равных выражениях и тождестве.

Планируемые результаты: иметь представление о тождестве.

Тип урока: урок-исследование.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте формулировку (алгебраическую и словесную) переместительного свойства для сложения и умножения.

2. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $7{,}63 + 2{,}41 + 2{,}59 + 2{,}37$; б) $\frac{3}{22} \cdot \frac{17}{23} \cdot \frac{44}{3} \cdot \frac{23}{34}$.

3. Вычислите значение выражения
$(3 - a) + (a - 2) + (4 - a) + (a - 1)$.

Вариант 2

1. Дайте формулировку (алгебраическую и словесную) сочетательного свойства для сложения и умножения.

2. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $3{,}82 + 1{,}58 + 3{,}42 + 6{,}18$; б) $\frac{7}{11} \cdot \frac{19}{36} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{18}{19}$.

3. Вычислите значение выражения
$(2 - b) + (b + 5) + (4 - b) + (b - 3)$.

III. Работа по теме урока

Пример 1

Найдем значения двух алгебраических выражений x^2 и $5 \cdot x - 6$ при одном и том же значении переменной, например $x = 1$. Получаем значения этих выражений: $(1)^2 = 1$ и $5 \cdot 1 - 6 = -1$. Видно, что соответственные значения выражений не равны. Теперь найдем соответственные значения этих выражений при $x = 2$. Получаем значения: $(2)^2 = 4$ и $5 \cdot 2 - 6 = 4$. В этом случае значения выражений равны.

Существуют и такие *выражения, соответственные значения которых равны при любых допустимых значениях переменных*. Такие выражения называются *тождественно равными*.

Пример 2

а) В соответствии с переместительным и сочетательным свойствами сложения выражения $a + b + c$; $b + a + c$; $(a + b) + c$; $a + (b + c)$; $(a + c) + b$ и т. д. являются тождественно равными при всех значениях a, b и c.

б) В соответствии с основным свойством дроби выражения $\frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ и $\frac{a}{b}$ являются тождественно равными при всех допустимых значениях переменных a, b и c, т. е. при любых значениях a, b (кроме $b = 0$) и c (кроме $c = 0$), или при $b \neq 0$ и $c \neq 0$.

в) В соответствии с основным свойством дроби выражения $\frac{10 \cdot a \cdot b}{5 \cdot (a-1) \cdot (b-2)}$ и $\frac{2 \cdot a \cdot b}{(a-1) \cdot (b-2)}$ являются тождественно равными при $a \neq 1$ и $b \neq 2$.

Равенство, связывающее два тождественно равных выражения, называется тождеством.

Пример 3

Являются тождествами при всех допустимых значениях переменных равенства:

а) $a + b + c = a + (b + c)$;

б) $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$;

в) $\frac{10 \cdot a \cdot b}{5 \cdot (a-1) \cdot (b-2)} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{(a-1) \cdot (b-2)}$.

Верные числовые равенства также считаются тождествами.

Пример 4

Являются тождествами равенства:

а) $(3^2 - 5) : 4 = 2 - 1$;

б) $(1 + 2 + 3 + 4) : 5 = 2^2 - 2$.

IV. Задания на уроке

№ 85 (а, б), 86 (а, в), 87 (а, в), 88 (а, б), 90 (а, в), 91 (а), 92 (а), 93 (а, б).

V. Контрольные вопросы

- Какие значения алгебраических выражений являются соответственными?
- Могут ли соответственные значения выражений быть а) равными; б) неравными?
- Какие выражения называются тождественно равными? Приведите примеры.
- Какое равенство называется тождеством? Приведите примеры.
- В каком случае числовое равенство будет тождеством? Приведите примеры.

VI. Творческие задания

1. Проверьте, являются ли тождественно равными выражения:

а) $(a - 3) \cdot (a + 2)$ и $a^2 - a - 6$;

б) $(a + 3) \cdot (a - 2)$ и $a^2 - 2 \cdot a - 6$;

в) $(a - b) \cdot (a - 2 \cdot b)$ и $a^2 - 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b^2$;

г) $(a + b) \cdot (a - 2 \cdot b)$ и $a^2 + 3 \cdot a \cdot b - 2 \cdot b^2$.

2. При каких допустимых значениях переменных равенства являются тождествами?

а) $\dfrac{2 \cdot a \cdot (a-2)}{2 \cdot (a-1) \cdot (a-2)} = \dfrac{a}{a-1}$; в) $\dfrac{5 \cdot (a-b)}{(a-3) \cdot (a-b)} = \dfrac{5}{a-3}$;

б) $\dfrac{3 \cdot a \cdot (a+3)}{(a+1) \cdot (a+3)} = \dfrac{3 \cdot a}{a+1}$; г) $\dfrac{2 \cdot b \cdot (a-6)}{(a-6) \cdot (a-3 \cdot b)} = \dfrac{2 \cdot b}{a-3 \cdot b}$.

3. Укажите значения переменных, при которых равны соответственные значения выражений:

а) $2 \cdot x + y$ и $x + 3 \cdot y$; в) $4 \cdot x + y$ и $2 \cdot x + 2 \cdot y$;
б) $3 \cdot x + 3 \cdot y$ и $2 \cdot x + 2 \cdot y$; г) $3 \cdot x - y$ и $2 \cdot x + y$.

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 85 (в, г), 86 (б, г), 87 (б, г), 88 (в, г), 90 (б, г), 91 (б), 92 (б), 93 (в, г).

Уроки 8, 9. Тождественные преобразования выражений

Цели: сформировать представление о тождественных преобразованиях выражений; напомнить о простейших преобразованиях.

Планируемые результаты: освоить навыки выполнения тождественных преобразований выражений.

Тип уроков: урок общеметодологической направленности, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение пройденного материала

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Тождественные преобразования выражений.
2. Правила выполнения тождественных преобразований.

1. Тождественные преобразования выражений

Пример 1

Используя распределительное свойство, при всех значениях переменных найдем значение выражения:

$a \cdot (b - c) + b \cdot (c - a) + c \cdot (a - b) = a \cdot b - a \cdot c + b \cdot c - b \cdot a + c \cdot a - c \cdot b = a \cdot b - a \cdot c + b \cdot c - a \cdot b + a \cdot c - b \cdot c = (a \cdot b - a \cdot b) + (-a \cdot c + a \cdot c) + (b \cdot c - b \cdot c) = 0 + 0 + 0 = 0.$

При решении задачи было также использовано переместительное свойство: $b \cdot a = a \cdot b$, $c \cdot a = a \cdot c$, $c \cdot b = b \cdot c$ – и сочетательное свойство. В результате вычислений и замены выражений тождественно равными было получено, что при всех значениях переменных a, b и c данное громоздкое выражение $a \cdot (b - c) + b \cdot (c - a) + c \cdot (a - b)$ равно 0.

Замену одного *выражения другим, тождественно равным ему* выражением, *называют тождественным преобразованием или просто преобразованием выражения*. Тождественные преобразования выражений с переменными выполняются *с применением свойств действий над числами* (включая дроби).

2. Правила выполнения тождественных преобразований

Тождественные *преобразования выражений используются при решении многих* алгебраических *задач*. С некоторыми тождественными преобразованиями вы уже знакомы: приведение подобных членов, раскрытие скобок, сокращение дробей. Напомним *правила выполнения подобных преобразований*.

1. *При приведении подобных членов* надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть этих членов.

Пример 2

Используя распределительное свойство, приведем подобные члены в выражении:

$7 \cdot a \cdot b - 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b - 5 \cdot a \cdot b = a \cdot b \cdot (7 - 3 + 2 - 5) = a \cdot b \cdot 1 = a \cdot b$.

2. Если *перед скобками* стоит *знак «плюс»*, то *скобки опускают, сохраняя знак каждого слагаемого*, входящего в скобки.

Пример 3

Раскроем скобки, используя сочетательное свойство, в выражении:

$5 \cdot a^2 + (7 \cdot b - 2 \cdot c^2) = 5 \cdot a^2 + 7 \cdot b - 2 \cdot c^2$.

3. Если *перед скобками* стоит *знак «минус»*, то *скобки опускают, изменяя знак каждого слагаемого*, входящего в скобки, *на противоположный*.

Пример 4

Раскроем скобки, используя приведенное правило, в выражении:

$5 \cdot a^2 - (7 \cdot b - 2 \cdot c^2) = 5 \cdot a^2 - 7 \cdot b + 2 \cdot c^2$.

При этих преобразованиях были использованы распределительное и сочетательное свойства. Второе слагаемое $(7 \cdot b - 2 \cdot c^2)$ можно записать в виде произведения $(-1) \cdot (7 \cdot b - 2 \cdot c^2)$. Тогда получаем

$5 \cdot a^2 - (7 \cdot b - 2 \cdot c^2) = 5 \cdot a^2 + (-1) \cdot (7 \cdot b - 2 \cdot c^2) = 5 \cdot a^2 - 7 \cdot b + 2 \cdot c^2$.

4. *При сокращении дроби ее числитель и знаменатель можно разделить на одно и то же выражение, не равное нулю.*

Пример 5

Сократим дробь $\frac{3 \cdot a \cdot (a-5) \cdot (a+3)}{15 \cdot (a-5) \cdot (a+3)}$. Для этого ее числитель и знаменатель разделим на выражение $3 \cdot (a - 5) \cdot (a + 3)$ (при этом $a \neq 5$ и $a \neq -3$) и получим $\frac{a}{5}$. Выражения $\frac{3 \cdot a \cdot (a-5) \cdot (a+3)}{15 \cdot (a-5) \cdot (a+3)}$ и $\frac{a}{5}$ тождественно равны при всех допустимых значениях переменной, т. е. при $a \neq 5$ и $a \neq -3$.

IV. Задания на уроках

№ 95 (а, в), 97 (б, г), 98 (а, в), 100 (а, в), 103 (а, б), 104, 105 (а–в), 106 (б).

1. Докажите, что при любом значении переменной выражение $3 \cdot (2 \cdot a - 1) - 2 \cdot (3 \cdot a - 5)$ равно постоянной величине.

2. Сократите дроби:

а) $\frac{3 \cdot a}{7 \cdot a}$; б) $\frac{2 \cdot a \cdot (a-3)}{4 \cdot (a-3) \cdot b}$; в) $\frac{6 \cdot (a-3) \cdot (b-1)}{3 \cdot (b-1) \cdot (a+4)}$.

При каких значениях переменных преобразования будут тождественными?

V. Контрольные вопросы

– Что такое тождественное преобразование выражения?
– Как приводятся подобные члены в выражении?
– Как раскрываются скобки со знаком «плюс»?
– Как раскрываются скобки со знаком «минус»?
– Как можно сократить дробь?

VI. Творческие задания

1. Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $a - (a - (a + (a - 1)))$;

б) $c + 2 \cdot (c - 3 \cdot (c - 1))$.

2. Докажите, что выражение не зависит от переменных и равно постоянной величине:

а) $(a - b) \cdot (a + 2 \cdot b) - (a - b) \cdot (a + b) + b \cdot (b - a)$;

б) $(a + 2 \cdot b) \cdot (a + 3 \cdot b) - (a - b) \cdot (a + b) - b \cdot (7 \cdot b + 5 \cdot a)$.

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 95 (б, г), 97 (а, в), 98 (б, г), 100 (б, г), 103 (в, г), 105 (г, д), 106 (а).

1. Докажите, что выражение $6 \cdot (3 \cdot a + 2) - 9 \cdot (2 \cdot a - 1)$ не зависит от переменной a и равно постоянной величине.

2. Сократите дроби:

а) $\frac{7 \cdot b}{21 \cdot b}$; б) $\frac{3 \cdot a \cdot (b-c)}{15 \cdot (b-c) \cdot (a+1)}$; в) $\frac{5 \cdot (a-1) \cdot (c+2)}{15 \cdot (c+2) \cdot (b-3)}$.

При каких значениях переменных преобразования будут тождественными?

Урок 10. Контрольная работа № 1 по теме «Числовые и алгебраические выражения. Тождественные преобразования выражений»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко, поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при выполнении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает учащимся некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 к набранным баллам добавляются дополнительно 0,5 балла, за решение задач вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (т. е. оценка «5» выставляется уже за четыре задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Возможно, несколько труднее для учеников задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен ученикам (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий). При наличии такой техники в классе на стенде (после контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов.

Контрольная работа рассчитана на один урок.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $2\frac{1}{13}\cdot 1\frac{4}{9}-5\frac{1}{6}:2\frac{7}{12}$.

2. Вычислите значения выражений $a-3\cdot b$ и $2\cdot a-b$ при $a=6$ и $b=-5$ и сравните их.

3. Петя купил 5 тетрадей по a руб. и 3 альбома по b руб. Составьте выражение для стоимости покупки. Найдите стоимость покупки при $a=10{,}3$ и $b=16{,}8$.

4. Укажите допустимые значения переменных в выражении $\frac{3\cdot a-2\cdot b}{a+b}$ и найдите его значение при $a=1{,}7$ и $b=-1\frac{1}{2}$.

5. Определите знак выражения

$13\cdot x+17-(18\cdot x+14)+(5\cdot x-2)$.

6. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $3\frac{2}{11}\cdot 1\frac{4}{7}-4\frac{1}{3}:1\frac{1}{12}$.

2. Вычислите значения выражений $2\cdot a-3\cdot b$ и $3\cdot a-b$ при $a=8$ и $b=-3$ и сравните их.

3. Оля купила 6 тетрадей по a руб. и 4 альбома по b руб. Составьте выражение для стоимости покупки. Найдите стоимость покупки при $a=9{,}8$ и $b=14{,}4$.

4. Укажите допустимые значения переменных в выражении $\frac{4\cdot a-3\cdot b}{a+2\cdot b}$ и найдите его значение при $a=1{,}2$ и $b=-\frac{1}{2}$.

5. Определите знак выражения

$9\cdot x+22-(14\cdot x+15)+(5\cdot x-8)$.

6. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных нечетных чисел делится на 3.

Вариант 3

1. Найдите 40% числа $a=20\cdot\left(5\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}-2\frac{1}{7}:\frac{5}{7}\right)+3\frac{1}{3}\cdot 1{,}5$.

2. Вычислите значения выражений $3\cdot a-2\cdot(b+c)$ и $a+3\cdot(b+c)$ при $a=5$ и $b+c=3$ и сравните их.

3. Поезд ехал 2 ч со скоростью v_1 км/ч, затем сделал трехчасовую остановку и ехал еще 3 ч со скоростью v_2 км/ч. Составьте выражение для средней скорости поезда. Найдите среднюю скорость при $v_1=50$ и $v_2=60$ км/ч.

4. В выражении $\frac{6\cdot a+4\cdot b-3\cdot a\cdot b}{3\cdot a+2\cdot b}$ укажите допустимые значения переменных и найдите его значение при $a=\frac{2}{3}$ и $b=\frac{1}{2}$.

5. При каких натуральных значениях переменной a значение выражения $3 \cdot a - 2 \cdot (a - 3 \cdot (a - 1)) - 4$ отрицательно?

6. Одно число при делении на 8 дает остаток 3, другое число при делении на 4 дает остаток 1. Докажите, что сумма этих чисел делится на 4.

Вариант 4

1. Найдите 25% числа $a = 10 \cdot \left(7\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} - 4\frac{1}{3} : \frac{13}{6}\right) - 5\frac{1}{3} \cdot 4{,}5$.

2. Вычислите значения выражений $4 \cdot a + 3 \cdot (b + c)$ и $2 \cdot a + 4 \cdot (b + c)$ при $a = 1$ и $b + c = 2$ и сравните их.

3. Поезд ехал 3 ч со скоростью v_1 км/ч, затем сделал трехчасовую остановку и ехал еще 4 ч со скоростью v_2 км/ч. Составьте выражение для средней скорости поезда. Найдите среднюю скорость при $v_1 = 40$ и $v_2 = 60$ км/ч.

4. В выражении $\frac{4 \cdot a + 6 \cdot b - 3 \cdot a \cdot b}{2 \cdot a + 3 \cdot b}$ укажите допустимые значения переменных и найдите его значение при $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{4}{3}$.

5. При каких натуральных значениях переменной a значение выражения $5 - 3 \cdot (a - 2 \cdot (a + 1)) - 9 \cdot a$ положительно?

6. Одно число при делении на 10 дает остаток 3, другое число при делении на 5 дает остаток 2. Докажите, что сумма этих чисел делится на 5.

Вариант 5

1. Представив каждую дробь в виде разности двух дробей, найдите значение выражения $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

2. Вычислите значения выражений $3 \cdot a - 5 \cdot b + 6 \cdot c$ и $2 \cdot a - 3 \cdot b + 4 \cdot c$ при $a + 2 \cdot c = 3$ и $b = 4$ и сравните их.

3. Катер с собственной скоростью u км/ч движется по реке (скорость течения v км/ч). Катер проплыл 5 ч по течению и 3 ч против течения. Составьте выражение для средней скорости катера. Сравните среднюю и собственную скорости катера.

4. В выражении $\frac{a^2 + 3 \cdot a \cdot b}{3 \cdot b^2 + 2 \cdot a \cdot b}$ укажите допустимые значения переменных и найдите его значение при $a = -b$.

5. При каких натуральных значениях переменной a значение выражения $3 \cdot (0{,}7 \cdot a + 0{,}8) + 6 \cdot (a - 2 \cdot (0{,}4 \cdot a + 1{,}2))$ отрицательно?

6. Может ли сумма пяти последовательных натуральных чисел быть простым числом?

Вариант 6

1. Представив каждую дробь в виде разности двух дробей, найдите значение выражения $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{99\cdot 101}$.

2. Вычислите значения выражений $6\cdot a+4\cdot b-2\cdot c$ и $3\cdot a-3\cdot b-c$ при $3\cdot a-c=2$ и $b=3$ и сравните их.

3. Катер с собственной скоростью u км/ч движется по реке (скорость течения v км/ч). Катер проплыл 3 ч по течению и 5 ч против течения. Составьте выражение для средней скорости катера. Сравните среднюю и собственную скорости катера.

4. В выражении $\frac{a^2+2\cdot a\cdot b}{4b^2+3\cdot a\cdot b}$ укажите допустимые значения переменных и найдите его значение при $a=-b$.

5. При каких натуральных значениях a значение выражения $2\cdot(0{,}8\cdot a+1{,}9)+5\cdot(a-7\cdot(0{,}3\cdot a-0{,}2))$ положительно?

6. Может ли сумма четырех последовательных натуральных чисел быть простым числом?

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности.

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. 1.

2. Значение первого выражения больше.

3. $5 \cdot a + 3 \cdot b$; 101,9 руб.
4. $a \neq -b$; 40,5.
5. Знак «плюс».
6. Доказано.

Вариант 2

1. 1.
2. Значение второго выражения больше.
3. $6 \cdot a + 4 \cdot b$; 116,4 руб.
4. $a \neq -2 \cdot b$; 31,5.
5. Знак «минус».
6. Доказано.

Вариант 3

1. 10.
2. Значение второго выражения больше.
3. $\dfrac{2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2}{8}$; 35 км/ч.
4. $a \neq -\dfrac{2}{3} \cdot b$; $\dfrac{5}{3}$.
5. $a = 1$.
6. Доказано.

Вариант 4

1. 4.
2. Значения выражений равны.
3. $\dfrac{3 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2}{10}$; 36 км/ч.
4. $a \neq -\dfrac{3}{2} \cdot b$; 1,6.
5. $a = 1$.
6. Доказано.

Вариант 5

1. Представим каждую дробь в виде разности двух дробей. Тогда получаем

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots +$$
$$+\left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

При этом в сумме сокращаются все слагаемые, кроме первого и последнего.

(*Ответ:* $\dfrac{99}{100}$.)

2. Преобразуем данные выражения, используя свойства арифметических действий, и найдем их значения при $a + 2 \cdot c = 3$

и $b = 4$. Получаем $3 \cdot a - 5 \cdot b + 6 \cdot c = 3 \cdot a + 6 \cdot c - 5 \cdot b = (3 \cdot a + 6 \cdot c) - 5 \cdot b = 3 \cdot (a + 2 \cdot c) - 5 \cdot b = 3 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 9 - 20 = -11$ и $2 \cdot a - 3 \cdot b + 4 \cdot c = 2 \cdot a + 4 \cdot c - 3 \cdot b = (2 \cdot a + 4 \cdot c) - 3 \cdot b = 2 \cdot (a + 2 \cdot c) - 3 \cdot b = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = -6$.

При данных значениях переменных значение второго выражения больше.

(*Ответ:* значение второго выражения больше.)

3. По определению средняя скорость движения равна отношению пройденного пути к затраченному времени. За 5 ч движения по течению со скоростью $u + v$ катер проплыл расстояние $5 \cdot (u + v)$ км, и за 3 ч движения против течения со скоростью $u - v$ он проплыл расстояние $3 \cdot (u - v)$ км. Всего катер проплыл расстояние $5 \cdot (u + v) + 3 \cdot (u - v) = 5 \cdot u + 5 \cdot v + 3 \cdot u - 3 \cdot v = 8 \cdot u + 2 \cdot v$. На этот путь было затрачено $5 + 3 = 8$ (ч). Тогда средняя скорость катера $\frac{8 \cdot u + 2 \cdot v}{8} = \frac{8 \cdot u}{8} + \frac{2 \cdot v}{8} = u + \frac{v}{4}$, т. е. больше собственной скорости катера.

(*Ответ:* $u + \frac{v}{4}$, средняя скорость больше собственной.)

4. Для выражения $\frac{a^2 + 3 \cdot a \cdot b}{3 \cdot b^2 + 2 \cdot a \cdot b}$ допустимыми значениями переменных будут такие, при которых знаменатель не равен нулю, т. е. $3 \cdot b^2 + 2 \cdot a \cdot b \neq 0$, или $b \cdot (3 \cdot b + 2 \cdot a) \neq 0$, или $b \neq 0$ и $3 \cdot b + 2 \cdot a \neq 0$ (т. е. $a \neq -\frac{3}{2} \cdot b$). Поэтому данное выражение имеет смысл при всех значениях a и b, удовлетворяющих условиям $b \neq 0$ и $a \neq -\frac{3}{2} \cdot b$. Найдем значение выражения при $a = -b$. Получаем

$$\frac{(-b)^2 + 3 \cdot (-b) \cdot b}{3 \cdot b^2 + 2 \cdot (-b) \cdot b} = \frac{(-b) \cdot (-b) - 3 \cdot b^2}{3 \cdot b^2 - 2 \cdot b^2} = \frac{b^2 - 3 \cdot b^2}{b^2} = \frac{-2 \cdot b^2}{b^2} = -2.$$

(*Ответ:* $b \neq 0$ и $a \neq -\frac{3}{2} \cdot b$; -2.)

5. Сначала упростим данное выражение, поочередно раскрывая скобки (начиная с внутренних) и приводя подобные члены. Получаем $3 \cdot (0{,}7 \cdot a + 0{,}8) + 6 \cdot (a - 2 \cdot (0{,}4 \cdot a + 1{,}2)) = 2{,}1 \cdot a + 2{,}4 + 6 \cdot (a - 0{,}8 \cdot a - 2{,}4) = 2{,}1 \cdot a + 2{,}4 + 6 \cdot (0{,}2 \cdot a - 2{,}4) = 2{,}1 \cdot a + 2{,}4 + 1{,}2 \cdot a - 14{,}4 = 3{,}3 \cdot a - 12$.

Значения этого выражения будут отрицательными при натуральных значениях $a = 1, 2, 3$.

(*Ответ:* $a = 1, 2, 3$.)

6. Пять последовательных натуральных чисел можно записать так: n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$. Их сумма равна: $n + (n +$

$+ 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5 \cdot n + 10$. Так как в этой сумме каждое слагаемое кратно 5, то их сумма делится на 5, т. е. число составное. Поэтому сумма пяти последовательных натуральных чисел не может быть простым числом.

(*Ответ:* не может.)

Вариант 6

1. Представим каждую дробь в виде разности двух дробей. Тогда получаем

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{2}{99 \cdot 101} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots +$$
$$+\left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$$

При этом в сумме сокращаются все слагаемые, кроме первого и последнего.

(*Ответ:* $\frac{100}{101}$.)

2. Преобразуем данные выражения, используя свойства арифметических действий, и найдем их значения при $3 \cdot a - c = 2$ и $b = 3$. Получаем

$6 \cdot a + 4 \cdot b - 2 \cdot c = 6 \cdot a - 2 \cdot c + 4 \cdot b = (6 \cdot a - 2 \cdot c) + 4 \cdot b = 2 \cdot (3 \cdot a - c) + 4 \cdot b = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 4 + 12 = 16$ и $3 \cdot a - 3 \cdot b - c = 3 \cdot a - c - 3 \cdot b = (3 \cdot a - c) - 3 \cdot b = 2 - 3 \cdot 3 = 2 - 9 = -7$.

При данных значениях переменных значение первого выражения больше.

(*Ответ:* значение первого выражения больше.)

3. По определению средняя скорость движения равна отношению пройденного пути к затраченному времени. За 3 ч движения по течению со скоростью $u + v$ катер проплыл расстояние $3 \cdot (u + v)$ км, и за 5 ч движения против течения со скоростью $u - v$ он проплыл расстояние $5 \cdot (u - v)$ км. Всего катер проплыл расстояние $3 \cdot (u + v) + 5 \cdot (u - v) = 3 \cdot u + 3 \cdot v + 5 \cdot u - 5 \cdot v = 8 \cdot u - 2 \cdot v$. На этот путь было затрачено $3 + 5 = 8$ (ч). Тогда средняя скорость катера $\frac{8 \cdot u - 2 \cdot v}{8} = \frac{8 \cdot u}{8} - \frac{2 \cdot v}{8} = u - \frac{v}{4}$, т. е. меньше собственной скорости катера.

(*Ответ:* $u - \frac{v}{4}$, средняя скорость меньше собственной.)

4. Для выражения $\frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b}{4 \cdot b^2 + 3 \cdot a \cdot b}$ допустимыми значениями переменных будут такие, при которых знаменатель не равен нулю, т. е. $4 \cdot b^2 + 3 \cdot a \cdot b \neq 0$, или $b \cdot (4 \cdot b + 3 \cdot a) \neq 0$, или $b \neq 0$ и $4 \cdot b + 3 \cdot a \neq 0$ (т. е. $a \neq -\frac{4}{3} \cdot b$). Поэтому данное выражение имеет смысл при всех значениях a и b, удовлетворяющих условиям $b \neq 0$ и $a \neq -\frac{4}{3} \cdot b$. Найдем значение выражения прн $a = -b$.

Получаем

$$\frac{(-b)^2 + 2 \cdot (-b) \cdot b}{4 \cdot b^2 + 3 \cdot (-b) \cdot b} = \frac{(-b) \cdot (-b) - 2 \cdot b^2}{4 \cdot b^2 - 3 \cdot b^2} = \frac{b^2 - 2 \cdot b^2}{b^2} = \frac{-b^2}{b^2} = -1.$$

(*Ответ:* $b \neq 0$ и $a \neq -\frac{4}{3} \cdot b$; -1.)

5. Сначала упростим данное выражение, поочередно раскрывая скобки (начиная с внутренних) и приводя подобные члены. Получаем $2 \cdot (0{,}8 \cdot a + 1{,}9) + 5 \cdot (a - 7 \cdot (0{,}3 \cdot a - 0{,}2)) = 1{,}6 \cdot a + 3{,}8 + 5 \cdot (a - 2{,}1 \cdot a + 1{,}4) = 1{,}6 \cdot a + 3{,}8 + 5 \cdot (-1{,}1 \cdot a + 1{,}4) = 1{,}6 \cdot a + 3{,}8 - 5{,}5 \cdot a + 7 = 10{,}8 - 3{,}9 \cdot a$.

Значения этого выражения будут положительными при натуральных значениях $a = 1, 2$.

(*Ответ:* $a = 1, 2$.)

6. Четыре последовательных натуральных числа можно записать так: n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$. Их сумма: $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4 \cdot n + 6$. Так как в этой сумме каждое слагаемое кратно 2, то и их сумма делится на 2, т. е. число составное. Поэтому сумма четырех последовательных натуральных чисел не может быть простым числом.

(*Ответ:* не может.)

VI. Подведение итогов урока

§ 3. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Уроки 11, 12. Уравнение и его корни

Цель: сформировать представление об уравнении и его корнях.

Планируемые результаты: освоить основные понятия, связанные с уравнением.

Тип уроков: уроки проблемного изложения.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

План уроков

1. Корни уравнения.
2. Равносильные уравнения.

1. Корни уравнения

Сначала рассмотрим несколько примеров.

Пример 1

Квадрат некоторого числа больше самого числа на 6. Найдем данное число.

Пусть неизвестное число равно x, тогда его квадрат равен x^2. Число x, увеличенное на 6, равно $x + 6$. По условию задачи числа x^2 и $x + 6$ равны. Получаем равенство $x^2 = x + 6$, содержащее переменную x. Это равенство будет верным не при всех значениях x, а только при тех значениях x, которые являются ответом задачи. Такое равенство называют ***уравнением с одной переменной*** (или ***с одним неизвестным***) x. Для решения задачи надо найти такие числа, которые обращают равенство $x^2 = x + 6$ в верное. Эти числа x называют ***решениями уравнения*** или ***корнями уравнения***. Уравнение $x^2 = x + 6$ имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$. Действительно, при подстановке значения $x = 3$ в уравнение получаем верное числовое равенство $3^2 = 3 + 6$. При подстановке числа $x = -2$ в уравнение также получаем верное равенство $(-2)^2 = -2 + 6$.

Пример 2

Со склада вывозят груз на одинаковых машинах. Если загрузить 16 машин, то на складе останется 8 т груза. Если загрузить 14 машин, то на складе останется 32 т груза. Найдем грузоподъемность одной машины и массу груза, хранящегося на складе.

Пусть x т – грузоподъемность одной машины. Тогда 16 машин загружают $16x$ т груза. Если к этой величине $16x$ добавим 8 т, оставшихся на складе, то получим массу груза, хранящегося на складе, т. е. $16x + 8$. Второе условие задачи: 14 машин загружают $14x$ т груза. Если к этой величине $14x$ добавить 32 т, оставшихся на складе, то получим массу груза, хранящегося на складе, т. е. $14x + 32$. Приравняем выражения для массы груза, хранящегося на складе, которые получаются из первого и второго условий задачи. Получаем равенство $16x + 8 = 14x + 32$. Это равенство называется уравнением с одним неизвестным x. Уравнение $16x + 8 = 14x + 32$ имеет один корень $x = 12$, так как при подстановке этого значения в уравнение получаем верное числовое равенство $16 \cdot 12 + 8 = 14 \cdot 12 + 32 = 200$.

Учитывая примеры, сформулируем основные понятия. ***Равенство между двумя алгебраическими выражениями с одной переменной*** называют ***уравнением с одной переменной*** (или ***с одним неизвестным***).

Корнем уравнения называют ***значение переменной, при котором уравнение обращается в верное*** числовое ***равенство.***

В рассмотренных примерах уравнения имели конечное число корней (два или один). Уравнения также могут иметь бесконечное множество корней или вовсе не иметь корней.

Пример 3

Уравнение $7(x + 3) = 7x + 21$, используя распределительное свойство, можно записать в виде $7x + 7 \cdot 3 = 7x + 21$ или $7x + 21 = = 7x + 21$. Видно, что ***при любом значении x*** левая часть уравнения равна правой (т. е., по сути, ***уравнение является тождеством***). Поэтому любое число x будет корнем данного уравнения (таких корней бесконечно много).

Пример 4

Уравнение $x^2 + 1 = -x^2$ корней не имеет, так как при любых значениях x его левая часть $x^2 + 1$ положительна (т. е. $x^2 + 1 > 0$), а правая часть неположительна ($-x^2 \le 0$).

Заметим, что одна из частей уравнения может и не содержать переменной.

Пример 5

Равенства: а) $2x + 7 = 3$; б) $5x - 3 = 0$; в) $3x^2 - 10x = 5$; г) $2x^2 - - 3x + 6 = 0$; д) $4 = -x^2 + 3x$ — также являются уравнениями (а, б — линейные, в–д — квадратные).

2. Равносильные уравнения

Решить уравнение — значит ***найти все его корни*** или ***доказать, что корней нет. Уравнения***, которые имеют ***одни и те же корни***, называют ***равносильными***. Уравнения, которые ***не имеют корней***, также считают равносильными.

Пример 6

а) Уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $(x - 2)(x - 3) = 0$ являются равносильными, так как каждое из этих уравнений имеет одни и те же корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. (Проверьте сами.)

б) Уравнения $x^2 + 5 = -3$ и $x^2 + 1 = -2$ также являются равносильными, так как каждое из этих уравнений корней не имеет (в них левая часть при любых значениях x — величина положительная, а правая часть — отрицательная).

в) Уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $x + 4 = 6$ не являются равносильными, так как первое уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, а второе уравнение — только один корень $x = 2$. Несмотря на то что уравнения имеют один общий корень $x = 2$, они не считаются равносильными.

Решение уравнения состоит в его постепенной замене более простыми равносильными уравнениями. При решении уравнений используются следующие свойства.

1. Если в уравнении *перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак*, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример 7

Уравнения $6x = 3x + 7$ и $6x - 3x = 7$ равносильны (перенесли слагаемое $3x$ в левую часть уравнения).

2. Если *обе части* уравнения *умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число*, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример 8

Уравнения $6x = 3x + 7$ и $2x = x + \frac{7}{3}$ равносильны (обе части уравнения разделили на 3).

Эти *свойства* уравнений *основаны на свойствах числовых равенств*: если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число или обе части верного равенства умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число, то получится верное равенство.

III. Задания на уроках

№ 111 (а), 112 (б), 113, 115, 117 (а), 118, 120 (а, б), 121 (а).

1. Составьте уравнение, которое имеет корни:

а) 4; б) 4 и 2; в) 4, 2 и -3.

2. Равносильны ли уравнения? Объясните почему.

а) $2(x - 3) = 4$ и $2x = 10$;

б) $x - 3 = 0$ и $(x - 3)(x + 2) = 0$;

в) $x - 3 = 0$ и $x^2 + 1 = 0$;

г) $2x^2 + 3 = 0$ и $x^2 + 7 = 0$.

IV. Контрольные вопросы

- Что называется уравнением? Приведите примеры уравнений.
- Что называется корнем уравнения? Сколько корней может иметь уравнение? Приведите примеры.
- Какие уравнения называются равносильными?
- Сформулируйте основные свойства уравнений.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 111 (б), 112 (а), 114, 116, 117 (б), 119, 120 (в, г), 121 (б).

1. Приведите примеры:

а) равносильных уравнений;

б) неравносильных уравнений.

2. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $3x^2 + 5 = 0$; в) $(x - 3)^2 = -1$;

б) $2x^2 + |x| = -3$; г) $2x^2 + (x - 1)^2 + 5 = 0$.

Урок 13. Линейное уравнение с одной переменной

Цель: сформировать представление о линейном уравнении и его решении.

Планируемые результаты: освоить навыки решения линейных уравнений.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Что называется уравнением с одним неизвестным?

2. Составьте уравнение, которое имеет корни –2 и 5.

3. Проверьте, являются ли уравнения равносильными:

а) $x^2 + 3 = 1$ и $|x| - 2 = -3$;

б) $2x - 4 = 0$ и $3x = 6$;

в) $3x + 12 = 0$ и $(x + 4)(x^2 + 1) = 0$.

Объясните почему.

Вариант 2

1. Что называется корнем уравнения с одним неизвестным?

2. Составьте уравнение, которое имеет корни – 3 и 6.

3. Проверьте, являются ли уравнения равносильными. Объясните почему.

а) $x^2 + 4 = 2$ и $|x| - 1 = -2$;

б) $3x - 9 = 0$ и $2x = 6$;

в) $2x + 6 = 0$ и $(x + 3)(2x^2 + 1) = 0$.

III. Работа по теме урока

План урока

1. Линейное уравнение.

2. Решение линейных уравнений.

1. Линейное уравнение

Уравнение вида $a \cdot x = b$ (где x – переменная, a и b – некоторые числа) называется *линейным уравнением с одной переменной.* Отличительная особенность такого уравнения – переменная x входит в уравнение обязательно *в первой степени.*

Пример 1

Перечисленные уравнения являются линейными, так как имеют вид $a \cdot x = b$:

а) $3 \cdot x = 7$ (где $a = 3$, $b = 7$);

б) $-2 \cdot x = 5$ (где $a = -2$, $b = 5$);

в) $0 \cdot x = -5$ (где $a = 0$, $b = -5$);

г) $0 \cdot x = 0$ (где $a = 0$, $b = 0$).

Все линейные уравнения приводятся к стандартному виду $a \cdot x = b$ при помощи тождественных преобразований.

Пример 2

В уравнение $2(3x - 5) = x - 3$ переменная x входит в первой степени, поэтому оно является линейным. Приведем это уравнение к стандартному виду. В левой части раскроем скобки: $2 \cdot 3x - 2 \cdot 5 = x - 3$ или $6x - 10 = x - 3$.

Перенесем слагаемые, содержащие переменную x, в левую часть уравнения, числа – в правую. Приведем подобные члены. Получаем $6x - x = 10 - 3$ или $5x = 7$.

Линейное уравнение имеет стандартный вид $a \cdot x = b$ (где $a = 5$, $b = 7$).

Пример 3

Не является линейным уравнение:

а) $3x^2 + 6x + 7 = 0$, так как содержит переменную x во второй степени (слагаемое $3 \cdot x^2$);

б) $6x + 2|x| = 3$, так как содержит величину $|x|$;

в) $2x^3 + 5x = 4$, так как содержит переменную x в третьей степени.

2. Решение линейных уравнений

При решении линейного уравнения $a \cdot x = b$ возможны три случая:

1. Если число $a \neq 0$, то уравнение имеет один корень $x = \dfrac{b}{a}$.

2. Если числа $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней (любое число является его корнем).

3. Если числа $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение корней не имеет.

Пример 4

Решим уравнение $2(3x - 1) = 4(x + 3)$.

Приведем его к стандартному виду. Раскроем скобки в обеих частях уравнения: $2 \cdot 3x - 2 \cdot 1 = 4x + 4 \cdot 3$ или $6x - 2 = 4x + 12$. Слагаемые, зависящие от переменной x, перенесем в левую часть уравнения, числа – в правую, изменив их знаки на противоположные: $6x - 4x = 2 + 12$. Приведем подобные слагаемые: $2x = 14$. В этом уравнении $a = 2$ (очевидно, $a \neq 0$) и $b = 14$. Уравнение имеет один корень $x = \dfrac{b}{a} = \dfrac{14}{2} = 7$.

Пример 5

Решим уравнение $2(3x - 1) = 4(x + 3) - 14 + 2x$.

Приведем его к стандартному виду: $6x - 2 = 4x + 12 - 14 + 2x$, или $6x - 4x - 2x = 2 + 12 - 14$, или $0 \cdot x = 0$ (где $a = 0$, $b = 0$). Очевидно, что при подстановке любого значения x получаем верное числовое равенство $0 = 0$. Поэтому любое число является корнем этого уравнения (уравнение имеет бесконечно много корней).

Пример 6

Решим уравнение $2(3x - 1) = 4(x + 3) + 2x$.

Приведем это уравнение к стандартному виду: $6x - 2 = 4x + 12 + 2x$, или $6x - 4x - 2x = 12 + 2$, или $0 \cdot x = 14$ (где $a = 0$, $b = 14$). Очевидно, что при подстановке любого значения x получаем неверное числовое равенство $0 = 14$. Поэтому уравнение корней не имеет.

IV. Задания на уроке

№ 126 (а, в, е, з), 127 (б, в, д), 128 (е, з), 129 (а, в, д, к).

V. Контрольные вопросы

– Напишите стандартный вид линейного уравнения.
– Какое уравнение является линейным?
– Перечислите возможные случаи решения линейных уравнений.

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 126 (б, д, ж, и), 127 (а, г, е), 128 (ж, и), 129 (б, е, з, и).

Урок 14. Решение линейных уравнений

Цель: развить навыки решения линейных уравнений.

Планируемые результаты: научиться выстраивать алгоритм решения линейного уравнения.

Тип урока: урок-практикум.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $6x - 3 = 4x + 1$;

б) $2(4x + 2) = 3(2x + 1) + 2x$;

в) $5(3x + 2) - 4x = 11x + 10$.

2. При каком значении переменной a значение выражения $3a + 7$ больше значения выражения $a + 8$ на 5?

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $7x - 5 = 3x + 7$;

б) $3(3x + 4) = 2(4x + 5) + x$;

в) $6(2x + 3) - 8x = 4x + 18$.

2. При каком значении переменной a значение выражения $4a + 5$ больше значения выражения $a + 2$ на 6?

III. Работа по теме урока

IV. Задания на уроке

№ 130 (б, д, е), 132 (а, в), 133 (б, в), 135 (б, г), 137 (а, в).

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 130 (в, г, ж), 132 (б, г), 133 (а, г), 135 (в, д), 137 (б, г).

Уроки 15–17. Решение задач с помощью уравнений

Цель: сформировать представление о текстовых задачах и их решении с помощью уравнений.

Планируемые результаты: научиться строить математическую модель текстовой задачи и решать подобные задачи.

Тип уроков: продуктивный урок, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $3x + 5 = 2(x + 1)$;

б) $3(x + 2) + 2(x - 1) = 4(x + 3)$;

в) $5(x + 1{,}2) - 2(1{,}1x + 1) = 2{,}3x + 0{,}4$.

2. При каком значении переменной a значения выражений $5(a + 2)$ и $3a - 4$ совпадают?

3. При каких значениях переменной b значения выражений $3(b - 1)$ и $b + 3$ отличаются в два раза? (Рассмотрите оба случая.)

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $4x + 7 = 3(x - 1)$;

б) $3(x - 1) + 4(x + 1) = 6(x + 2)$;

в) $3(x - 1,1) + 4(1,2x + 2) = 7,3x + 0,7$.

2. При каком значении переменной a значения выражений $4(a - 3)$ и $2a + 6$ совпадают?

3. При каких значениях переменной b значения выражений $2(b + 3)$ и $3b - 1$ отличаются в два раза? (Рассмотрите оба случая.)

III. Работа по теме уроков

Для решения текстовых задач используют следующую схему:

1) обозначают неизвестную в задаче величину буквой;

2) используя эту букву, записывают другие величины в задаче;

3) составляют уравнение по условию задачи;

4) решают полученное уравнение;

5) находят требуемые по условию задачи величины.

Пример 1

Три бригады рабочих изготавливают игрушки к Новому году. Первая бригада сделала шары. Вторая бригада изготавливает сосульки и сделала их на 12 штук больше, чем шаров. Третья бригада изготавливает снежинки и сделала их на 5 штук меньше, чем изготовлено шаров и сосулек вместе. Всего было сделано 379 игрушек. Сколько в отдельности изготовлено шаров, сосулек и снежинок?

Решение

Составим математическую модель задачи. Обозначим количество шаров буквой x. Тогда количество сосулек по условию равно $x + 12$. Шаров и сосулек вместе было изготовлено $x + (x + 12) = x + x + 12 = 2x + 12$. Снежинок было сделано на 5 штук меньше, т. е. $2x + 12 - 5 = 2x + 7$. Всего было изготовлено $x + (x + 12) + (2x + 7)$ игрушек. По условию было сделано 379 игрушек. Поэтому получаем уравнение $x + (x + 12) + (2x + 7) = 379$.

Это уравнение является линейным. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $x + x + 12 + 2x + 7 = 379$. Перенесем число 19 в правую часть и приведем уравнение к стандартному виду: $4x = 379 - 19$ или $4x = 360$. Разделим обе части уравнения на число 4 и найдем $x = 90$. Итак, было изготовлено 90 шаров. Тогда сосулек было сделано $x + 12 = 90 + 12 = 102$ штуки и снежинок $2x + 7 = 2 \cdot 90 + 7 = 187$ штук.

Пример 2

Надо расставить 380 книг на три полки так, чтобы на второй полке было на 6 книг больше, чем на первой, а на третьей полке на 9 книг больше, чем на второй. Можно ли это сделать? Если да, то как?

Решение

Составим математическую модель задачи. Пусть на первую полку поставили x книг, тогда на вторую полку – $x + 6$ книг и на третью полку – $x + 15$ книг. Всего на трех полках будет стоять $x + (x + 6) + (x + 15)$ книг. По условию задачи книг должно быть 380. Получаем уравнение: $x + (x + 6) + (x + 15) = 380$. После приведения подобных членов имеем $3x + 21 = 380$. Запишем это уравнение в стандартном виде: $3x = 380 - 21$ или $3x = 359$, откуда $x = 119\frac{2}{3}$. Очевидно, что число книг на полке не может быть дробным. Поэтому описанная в задаче расстановка книг на полке невозможна.

IV. Задания на уроках

№ 143, 146, 148, 150, 154, 155, 159, 160.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 144, 145, 149, 151, 153, 156, 161, 162.

§ 4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Уроки 18, 19. Среднее арифметическое, размах и мода

Цель: ознакомить с простейшими статистическими характеристиками.

Планируемые результаты: иметь представление о среднем арифметическом, размахе и моде ряда чисел.

Тип уроков: урок-лекция, урок общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

План уроков

1. Наука статистика.
2. Среднее арифметическое ряда чисел.

3. Размах ряда чисел.
4. Мода ряда чисел.

1. Наука статистика

Наш XXI в. характеризуют различным образом: век новых технологий (в частности, нанотехнологий, генной инженерии), век биофизики, век биохимии, век астрофизики (проверка основополагающих космогонических теорий, разработка теории физики элементарных частиц, строительство большого адронного коллайдера) и т. д. При этом самые интересные результаты получали и получают на стыке самых различных наук. Теория новых наблюдаемых явлений только разрабатывается, и в ряде случаев приходится иметь дело с огромным количеством измеряемых величин.

Если вдуматься, все новейшие направления науки и техники объединяет, прежде всего, получение принципиально новой *информации*. Поэтому правильнее назвать наш век веком информации. Буквально за несколько последних лет появились сверхмощные компьютеры, уникальное программное обеспечение, Интернет, различные поисковые системы, разрабатываются и совершенствуются методы обработки информации и т. п.

Многие из нас участвуют в переписи населения, выборах, опросах, тестировании и т. д. А это означает наличие определенной информации, которая нуждается в обработке. Данной цели служит наука *статистика*. Задача статистики – получение информации, ее отражение, обработка и интерпретация результатов обработки. В широком смысле *статистика* – одна из наук, связанных с *информацией*. Поэтому, прежде всего, необходимо познакомиться с простейшими понятиями статистики.

2. Среднее арифметическое ряда чисел

Для начала рассмотрим следующий пример.

Пример 1

На математической олимпиаде члены команды, состоящей из 10 семиклассников, получили такие баллы: 23, 27, 25, 30, 38, 25, 42, 40, 25, 35.

Как в среднем выступила команда, т. е. сколько баллов набрал некоторый «усредненный» член команды? Для ответа на этот вопрос разделим количество баллов, которое набрала команда (т. е. сумму баллов всех членов), на число участников и получим $\frac{23+27+25+30+38+25+42+40+25+35}{10}=\frac{310}{10}=31.$

Число 31, полученное в результате, называют *средним арифметическим* рассматриваемого ряда чисел.

Средним арифметическим ряда чисел называют частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Итак, среднее арифметическое ряда чисел – одна из статистических характеристик, но, разумеется, не единственная.

3. Размах ряда чисел

Из примера 1 видно, что команда семиклассников выступила неплохо. Но давайте сравним ее успехи с успехами команды восьмиклассников из следующего примера.

Пример 2

У команды восьмиклассников (также состоящей из 10 человек) на той же олимпиаде были следующие баллы: 29, 30, 32, 33, 29, 31, 32, 29, 32, 33.

Легко проверить, что среднее арифметическое этого ряда чисел $\frac{29+30+32+33+29+31+32+29+32+33}{10}=\frac{310}{10}=31$ такое же, как и в примере 1. Поэтому в среднем успехи и семиклассников, и восьмиклассников одинаковы. Вместе с тем имеются и существенные различия. Если сравнить примеры 1 и 2, то видно, что баллы восьмиклассников почти одинаковы (и близки к среднему арифметическому), а баллы семиклассников значительно отличаются (и у некоторых семиклассников далеки от среднего арифметического).

Поэтому введем еще одну статистическую характеристику – *размах* ряда чисел.

Размахом ряда чисел называют разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

В примере 1 размах ряда составляет $42 - 23 = 19$, в примере 2 размах ряда равен: $33 - 29 = 4$.

Очевидно, что семиклассники более разнородны, чем восьмиклассники (так как имеются ребята и со слабой, и с сильной подготовкой).

Разумеется, для получения более полной информации необходимо вводить и другие характеристики.

4. Мода ряда чисел

Также интересно знать, какое количество баллов наиболее типично, т. е. какое количество баллов наиболее часто встречается. Так, в примере 1 это число 25 (встречается три раза), его называют *модой* рассматриваемого ряда чисел.

Модой ряда чисел называют число, которое встречается в данном ряду чаще других.

Ряд чисел может иметь и более одной моды. Так, в примере 2 имеются две моды – числа 29 и 32, так как каждое из них встречается в ряду по три раза, а остальные числа – не более двух раз.

Ряд чисел может и не иметь моды совсем.

Пример 3

Рассмотрим ряд чисел: 27, 23, 25, 31, 30, 28, 32, 29, 33, 42, который не имеет моды, так как каждое число встречается только один раз.

Заметим, что обычно статистической обработке подвергаются ряды, состоящие из *огромного количества* чисел (например, средний возраст населения страны, мода роста призывников в военкомате и т. д.). При небольшом количестве чисел в ряду статистика нецелесообразна: легко обозреть эти числа и сделать соответствующие выводы (примеры 1–3 приведены только для того, чтобы ввести основные статистические характеристики).

При обработке большого ряда чисел его удобно сначала упорядочить.

Упорядоченным рядом чисел называют ряд, в котором последующее число *не меньше* (или *не больше*) предыдущего.

Пример 4

Рассмотрим ряд из 20 чисел: 24, 23, 31, 27, 24, 25, 28, 26, 32, 24, 31, 26, 28, 30, 29, 26, 24, 28, 24, 26.

Упорядочим этот ряд (например, в порядке возрастания чисел): 23, 24, 24, 24, 24, 24, 25, 26, 26, 26, 26, 27, 28, 28, 28, 29, 30, 31, 31, 32.

Учитывая повторяемость чисел в этом ряду, его удобно записать в виде 23, $\underbrace{24, ..., 24}_{5\text{ раз}}$, 25, $\underbrace{26, ..., 26}_{4\text{ раза}}$, 27, $\underbrace{28, ..., 28}_{3\text{ раза}}$, 29, 30, 31, 31, 32.

Теперь легко определить статистические характеристики данного ряда чисел. Среднее арифметическое равно:

$$\frac{23 + 24 \cdot 5 + 25 + 26 \cdot 4 + 27 + 28 \cdot 3 + 29 + 30 + 31 \cdot 2 + 32}{20} =$$

$$= \frac{536}{20} = 26{,}8.$$

Размах ряда равен: $32 - 23 = 9$, мода ряда составляет 24 (так как это число встречается чаще всего).

В заключение отметим особенности статистических характеристик:

1. Среднее арифметическое ряда чисел может не совпадать ни с одним из чисел ряда.

2. Мода ряда чисел (если она существует) обязательно совпадает с двумя или более числами ряда.

3. Размах ряда чисел показывает, насколько они близки друг к другу (и к их среднему арифметическому).

4. Чем больше статистических характеристик используется, тем полнее информация об этом ряде чисел.

III. Задания на уроках

№ 168 (а, б), 170 (б, в), 171, 174, 176, 181.

IV. Контрольные вопросы

– Назовите основные задачи статистики.
– Что такое среднее арифметическое ряда чисел?
– Дайте определение размаха ряда чисел.
– Дайте определение моды ряда чисел.
– Дайте определение упорядоченного ряда чисел.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 168 (в, г), 170 (а), 172, 173, 179.

Уроки 20, 21. Медиана как статистическая характеристика

Цель: рассмотреть понятие медианы ряда чисел.

Планируемые результаты: научиться находить медиану ряда чисел.

Тип уроков: уроки-исследования.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Что такое среднее арифметическое ряда чисел?

2. Может ли ряд чисел иметь две моды?

3. Найдите среднее арифметическое, размах и моду ряда чисел: 16, 14, 11, 15, 14, 17.

Вариант 2

1. Что такое мода ряда чисел?

2. Может ли среднее арифметическое ряда чисел не совпадать с одним из этих чисел?

3. Найдите среднее арифметическое, размах и моду ряда чисел: 12, 15, 11, 16, 11, 19.

III. Работа по теме уроков

Рассмотрим еще одну статистическую характеристику ряда чисел – *медиану*. Обсуждение начнем с такого примера.

Пример 1

В ведомости приведены зарплаты (в тысячах рублей) 11 сотрудников фирмы: 14, 12, 16, 18, 14, 216, 15, 17, 20, 24, 19.

Найдем среднее арифметическое этого ряда чисел: $\frac{385}{11} = 35$. Разумеется, эта величина плохо характеризует средний доход сотрудников фирмы (так как все сотрудники, кроме директора, получают значительно меньше). Мода такого ряда чисел, равная 14, также плохо характеризует доходы сотрудников фирмы. Поэтому приходится вводить новый статистический показатель данного ряда чисел – *медиану*.

Упорядочим этот ряд чисел (например, в порядке возрастания чисел): 12, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 216. В середине ряда (на шестом месте) находится число 17, которое разумнее характеризует среднюю зарплату сотрудников фирмы. Такое число называют *медианой* ряда чисел. При этом, по сути дела, не учитываются резко отличающиеся от остальных числа.

Теперь обсудим понятие медианы ряда чисел в случае их четного количества.

Пример 2

Рассмотрим ряд, состоящий из 10 чисел: 14, 12, 16, 18, 14, 15, 17, 20, 24, 19.

Как и в предыдущем примере, упорядочим этот ряд: 12, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24. На ближайших к середине ряда местах стоят: на пятом месте – число 16, на шестом месте – число 17. Тогда разумно считать, что полусумма этих чисел $\frac{16+17}{2} = 16{,}5$ является медианой данного ряда чисел.

Итак, для нахождения медианы ряда чисел надо упорядочить данный ряд чисел.

1. В ряду с нечетным числом членов медианой считается число, записанное посередине (стоящее в середине ряда).

2. В ряду с четным числом членов медианой считается число, равное полусумме чисел, записанных посередине.

Заметим, что медиана разбивает ряд чисел на две одинаковые по численности группы: числа, не большие медианы, и числа, не меньшие медианы.

В заключение отметим сложность статистической обработки данных в реальной жизни. Например, в качестве средней характеристики зарплаты в Москве можно принять любую из величин:

среднее арифметическое, моду, медиану. Но, как видно из примера 1, эти характеристики могут существенно различаться: среднее арифметическое равно 35, мода равна 14, и медиана равна 17. Какая из характеристик точнее отражает средний уровень зарплаты в Москве, остается вопросом.

IV. Задания на уроках

№ 186 (а, в), 188 (б, в), 189, 191.

V. Контрольные вопросы

– Дайте определение медианы ряда чисел.
– Может ли медиана ряда чисел не совпадать ни с одним из чисел ряда?
– Какое число считают медианой упорядоченного ряда, содержащего нечетное количество чисел? четное количество чисел?

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 186 (б, г), 188 (а, г), 190, 192, 193.

Урок 22. Контрольная работа № 2 по теме «Уравнения с одной переменной»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко, поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при выполнении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает учащимся некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 к набранным баллам добавляются дополнительно 0,5 балла, за решение задач вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (т. е. оценка «5» выставляется уже за четыре задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Возможно, несколько труднее для учеников задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен ученикам (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий). При наличии такой техники в классе на стенде (после контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Контрольная работа рассчитана на один урок.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Какие из чисел –3, –2, 2, 3 являются корнями уравнения:

а) $x^2 + 8 = 6x$; б) $|x - 6| = 3 - 2x$?

2. Решите уравнение:

а) $(2x - 1)(x + 3) = 0$; б) $\frac{3x-2}{5} = \frac{2x-3}{4}$.

3. При каком значении переменной разность выражений $6x - 7$ и $2x + 3$ равна 4?

4. При каком значении параметра a уравнение $a \cdot x = 3a + x$ имеет единственный корень? Найдите его.

5. На складе хранится 520 т рыбы. При этом трески в 1,5 раза больше, чем наваги. Окуня на 16 т больше, чем трески. Сколько тонн наваги, трески и окуня находится на складе?

6. Найдите три последовательных натуральных числа, если утроенная сумма крайних чисел на 145 больше среднего числа.

Вариант 2

1. Какие из чисел –3, –2, 2, 3 являются корнями уравнения:

а) $x^2 + 9 = 6x$; б) $|x - 4| = -2 - 4x$?

2. Решите уравнение:

а) $(1 - 3x)(x + 2) = 0$; б) $\frac{2x-3}{3} = \frac{4x-1}{5}$.

3. При каком значении переменной разность выражений $8x - 3$ и $3x + 4$ равна 5?

4. При каком значении параметра a уравнение $a \cdot x = 4a + 2x$ имеет единственный корень? Найдите его.

5. На базе хранится 590 т овощей. При этом картофеля в 2,5 раза больше, чем моркови. Лука на 14 т больше, чем картофеля. Сколько тонн моркови, картофеля и лука находится на базе?

6. Найдите три последовательных натуральных четных числа, если удвоенная сумма крайних чисел на 84 больше среднего числа.

Вариант 3

1. Не решая уравнения $9(2x - 1) + 6(3x + 1) = 127$, докажите, что оно не имеет целых корней.

2. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-3}{3} - \frac{x+2}{4} = \frac{5}{12}$; б) $|3x - 1| = 5$.

3. Оля задумала число и уменьшила его на 3. Этот результат умножила на 4 и прибавила к нему 7. В итоге получилось 31. Найдите задуманное число.

4. Решите уравнение $(a - 3) \cdot x = 2a - 6$ при всех значениях параметра a.

5. На трех автобазах находится 606 машин. На второй базе на 18 машин больше, чем на первой. На третьей базе в 2 раза больше машин, чем на первых двух базах вместе. Какой процент всех машин находится на третьей базе? Сколько машин на первой базе?

6. При каком наименьшем натуральном значении параметра a уравнение $3(x - 1) = a - 8$ имеет положительный корень?

Вариант 4

1. Не решая уравнения $6(4x + 1) + 9(2x - 3) = 128$, докажите, что оно не имеет целых корней.

2. Решите уравнение:

а) $\frac{3x-1}{4} - \frac{4x+1}{3} = \frac{7}{12}$; б) $|7x - 3| = 4$.

3. Юра задумал число и увеличил его на 2. Этот результат умножил на 5 и вычел из него 6. В итоге получилось 49. Найдите задуманное число.

4. Решите уравнение $(a - 2) \cdot x = 3a - 6$ при всех значениях параметра a.

5. На трех складах хранится 624 компьютера. На третьем складе находится на 12 компьютеров меньше, чем на первом. На втором складе в 3 раза больше компьютеров, чем на первом и третьем складах вместе. Какой процент всех компьютеров хранится на втором складе? Сколько компьютеров на первом складе?

6. При каком наибольшем натуральном значении параметра a уравнение $4(x - 2) = a - 15$ имеет отрицательный корень?

Вариант 5

1. Решите уравнение $|x - 1| + |x - 4| = 3$.

2. Решите уравнение $(a - 3)(a + 2) \cdot x = a + 2$ при всех значениях параметра a.

3. Количество компьютеров на трех складах относится как $1 : 2 : 3$. С первого склада было продано 7 компьютеров, с третьего склада – 16 компьютеров, а на второй склад привезли 17 компьютеров. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складах вместе. Сколько компьютеров было на каждом складе сначала?

4. Катер по течению реки за 5 ч проплыл такое же расстояние, которое проплывает против течения реки за 8 ч. Во сколько раз собственная скорость катера больше скорости течения реки?

5. Докажите, что уравнение $(x + 3)(x + 4)(x + 5) = 31$ не имеет целых корней.

6. При каких целых значениях параметра a уравнение $a \cdot x = 5 + 2x$ имеет целые корни? Найдите эти корни.

Вариант 6

1. Решите уравнение $|x - 2| + |x - 5| = 3$.

2. Решите уравнение $(a - 2)(a + 3) \cdot x = a + 3$ при всех значениях параметра a.

3. Количество компьютеров на трех складах относится как 2 : 1 : 3. С первого склада было продано 9 компьютеров, с третьего склада – 27 компьютеров, а на второй склад привезли 32 компьютера. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складах вместе. Сколько компьютеров было на каждом складе сначала?

4. Катер по течению реки за 6 ч проплыл такое же расстояние, которое проплывает против течения реки за 9 ч. Во сколько раз собственная скорость катера больше скорости течения реки?

5. Докажите, что уравнение $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 25$ не имеет целых корней.

6. При каких целых значениях параметра a уравнение $a \cdot x = 7 + 3x$ имеет целые корни? Найдите эти корни.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 — 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности.

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. а) 2; б) –3.

2. а) $x = \frac{1}{2}$ и $x = -3$; б) $x = -3{,}5$.

3. $x = 3{,}5$.

4. При $a \neq 1$ $x = \frac{3a}{a-1}$.

5. 126 т наваги, 189 т трески, 205 т окуня.

6. 28, 29, 30.

Вариант 2

1. а) $x = 3$; б) $x = -2$.

2. а) $x = \frac{1}{3}$ и $x = -2$; б) $x = -6$.

3. $x = 2{,}4$.

4. При $a \neq 2$ $x = \frac{4a}{a-2}$.

5. 96 т моркови, 240 т картофеля, 254 т лука.

6. 26, 28, 30.

Вариант 3

1. Доказано.

2. а) $x = 4{,}6$; б) $x = 2$ и $x = -\frac{4}{3}$.

3. 9.

4. При $a \neq 3$ $x = 2$, при $a = 3$ x — любое число.

5. $66\frac{2}{3}\%$; 92 машины.

6. $a = 6$.

Вариант 4

1. Доказано.

2. а) $x = -2$; б) $x = 1$ и $x = -\frac{1}{7}$.

3. 9.

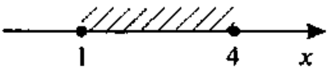
4. При $a \neq 2$ $x = 3$, при $a = 2$ x – любое число.

5. 75%; 84 компьютера.

6. $a = 6$.

Вариант 5

1. При решении уравнения $|x - 1| + |x - 4| = 3$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|x - 1|$ – расстояние от числа x до числа 1 на координатной прямой, величина $|x - 4|$ — расстояние от числа x до числа 4. Тогда геометрический смысл данного уравнения таков: сумма расстояний от числа x до чисел 1 и 4 должна равняться 3.



На рисунке видно, что для чисел $1 \le x \le 4$ такое условие выполняется. Таким образом, решение данного уравнения – любое число x из промежутка $1 \le x \le 4$.

(*Ответ:* $1 \le x \le 4$.)

2. Если коэффициент при x в уравнении $(a - 3)(a + 2) \cdot x = a + 2$ не равен нулю (т. е. $a \ne 3$ и $a \ne -2$), то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{a+2}{(a-3)(a+2)} = \frac{1}{a-3}$.

Подставим значение $a = 3$ в данное уравнение и получим $(3 - 3)(3 + 2) \cdot x = 3 + 2$ или $0 \cdot x = 5$. Такое уравнение решений не имеет. Подставим значение $a = -2$ в данное уравнение и получим $(-2 - 3)(-2 + 2) \cdot x = -2 + 2$ или $0 \cdot x = 0$. Любое число x является решением данного уравнения.

(*Ответ:* при $a \ne 3$ и $a \ne -2$ $x = \frac{1}{a-3}$, при $a = 3$ решений нет, при $a = -2$ x – любое число.)

3. Так как число компьютеров на складах относится как $1 : 2 : 3$, то на первом складе находится x штук, на втором – $2x$ штук и на третьем – $3x$ штук. В соответствии с условиями задачи после продажи и поступления компьютеров на склады их стало: на первом складе – $x - 7$ штук, на втором складе – $2x + 17$ штук и на третьем складе – $3x - 16$ штук. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складах вместе. Поэтому получаем уравнение: $2x + 17 = (x - 7) + (3x - 16)$, или $2x + 17 = 4x - 23$, или $40 = 2x$, откуда $x = 20$. Следовательно, на складах было: на первом – 20 компьютеров, на втором – $2 \cdot 20 = 40$ компьютеров, на третьем – $3 \cdot 20 = 60$ компьютеров.

(*Ответ:* 20 компьютеров, 40 компьютеров, 60 компьютеров.)

4. Пусть собственная скорость катера x км/ч, скорость течения реки y км/ч. По течению реки, двигаясь со скоростью $x + y$ км/ч, катер за 5 ч проплыл расстояние $5(x + y)$ км. Против течения реки, двигаясь со скоростью $x - y$ км/ч, катер за 8 ч проплыл расстояние $8(x - y)$ км. По условию эти расстояния одинаковы. Поэтому получаем уравнение: $5(x + y) = 8(x - y)$, или $5x + 5y = 8x - 8y$, или $5y + 8y = 8x - 5x$, или $13y = 3x$, откуда $x = \frac{13y}{3} = 4\frac{1}{3}y$.

Следовательно, собственная скорость катера больше скорости течения реки в $4\frac{1}{3}$ раза.

(*Ответ:* в $4\frac{1}{3}$ раза.)

5. Пусть уравнение $(x + 3)(x + 4)(x + 5) = 31$ имеет целый корень x. Тогда числа $x + 3$, $x + 4$, $x + 5$ – целые и последовательные. Среди трех последовательных целых чисел обязательно одно делится на 2 и одно – на 3 (например, числа 7, 8, 9), поэтому произведение таких чисел без остатка делится на $2 \cdot 3 = 6$. Следовательно, левая часть уравнения кратна 6. В правой части уравнения стоит число 31, которое делится на 6 с остатком 1. Получаем противоречие. Поэтому данное уравнение не может иметь целых корней.

(*Ответ:* доказано.)

6. Уравнение $a \cdot x = 5 + 2x$ запишем в виде $a \cdot x - 2x = 5$ или $(a - 2) \cdot x = 5$. При $a \neq 2$ это уравнение имеет корень $x = \frac{5}{a-2}$. Чтобы такой корень был целым числом, надо, чтобы целое число $a - 2$ было делителем числа 5 (т. е. ±1, ±5). Итак, рассмотрим четыре случая:

1) $a - 2 = 1$ (т. е. $a = 3$), тогда $x = \frac{5}{1} = 5$;

2) $a - 2 = -1$ (т. е. $a = 1$), тогда $x = \frac{5}{-1} = -5$;

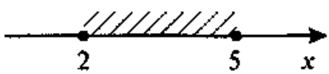
3) $a - 2 = 5$ (т. е. $a = 7$), тогда $x = \frac{5}{5} = 1$;

4) $a - 2 = -5$ (т. е. $a = -3$), тогда $x = \frac{5}{-5} = -1$.

(*Ответ*: при $a = 3$ $x = 5$, при $a = 1$ $x = -5$, при $a = 7$ $x = 1$, при $a = -3$ $x = -1$.)

Вариант 6

1. При решении уравнения $|x-2|+|x-5|=3$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|x-2|$ – расстояние от числа x до числа 2 на координатной прямой, величина $|x-5|$ – расстояние от числа x до числа 5. Тогда геометрический смысл данного уравнения таков: сумма расстояний от числа x до чисел 2 и 5 должна равняться 3.



На рисунке видно, что для чисел $2 \le x \le 5$ такое условие выполняется. Таким образом, решение данного уравнения – любое число x из промежутка $2 \le x \le 5$.

(*Ответ:* $2 \le x \le 5$.)

2. Если коэффициент при x в уравнении $(a-2)(a+3)\cdot x = a+3$ не равен нулю (т. е. $(a-2)(a+3) \ne 0$ или $a \ne 2$ и $a \ne -3$), то уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{a+3}{(a-2)(a+3)} = \dfrac{1}{a-2}$.

Подставим значение $a = 2$ в данное уравнение и получим $(2-2)(2+3)\cdot x = 2+3$ или $0 \cdot x = 5$. Такое уравнение решений не имеет. Подставим значение $a = -3$ в данное уравнение и получим $(-3-2)(-3+3)\cdot x = -3+3$ или $0 \cdot x = 0$. Любое число x является решением данного уравнения.

(*Ответ:* при $a \ne 2$ и $a \ne -3$ $x = \dfrac{1}{a-2}$, при $a = 2$ решений нет, при $a = -3$ x – любое число.)

3. Так как число компьютеров на складах относится как $2:1:3$, то на первом складе находится $2x$ штук, на втором – x штук и на третьем – $3x$ штук. В соответствии с условиями задачи после продажи и поступления компьютеров на склады их стало: на первом складе – $2x - 9$ штук, на втором – $x + 32$ штук и на третьем складе – $3x - 27$ штук. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складах вместе. Поэтому получаем уравнение: $x + 32 = (2x - 9) + (3x - 27)$, или $x + 32 = 5x - 36$, или $68 = 4x$, откуда $x = 17$. Следовательно, на складах было: на первом – $2 \cdot 17 = 34$ компьютера, на втором – 17 компьютеров, на третьем – $3 \cdot 17 = 51$ компьютер.

(*Ответ:* 34 компьютера, 17 компьютеров, 51 компьютер.)

4. Пусть собственная скорость катера x км/ч, скорость течения реки y км/ч. По течению реки, двигаясь со скоростью $x + y$ км/ч, катер за 6 ч проплыл расстояние $6(x + y)$ км. Против течения реки, двигаясь со скоростью $x - y$ км/ч, катер за 9 ч проплыл расстояние $9(x - y)$ км. По условию эти расстояния одинаковы. Поэтому получаем уравнение: $6(x + y) = 9(x - y)$, или $6x + 6y = 9x - 9y$, или $6y + 9y = 9x - 6x$, или $15y = 3x$, откуда $x = \dfrac{15y}{3} = 5y$.

Следовательно, собственная скорость катера больше скорости течения реки в 5 раз.

(*Ответ*: в 5 раз.)

5. Пусть уравнение $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 25$ имеет целый корень x, тогда числа $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ – целые и последовательные. Среди трех последовательных целых чисел обязательно одно делится на 2 и одно – на 3 (например, числа 13, 14, 15), поэтому произведение таких чисел без остатка делится на $2 \cdot 3 = 6$. Следовательно, левая часть уравнения кратна 6. В правой части уравнения стоит число 25, которое делится на 6 с остатком 1. Получаем противоречие. Поэтому данное уравнение не может иметь целых корней.

(*Ответ:* доказано.)

6. Уравнение $a \cdot x = 7 + 3x$ запишем в виде $a \cdot x - 3x = 7$ или $(a - 3) \cdot x = 7$. При $a \neq 3$ это уравнение имеет корень $x = \frac{7}{a-3}$. Чтобы такой корень был целым числом, надо, чтобы целое число $a - 3$ было делителем числа 7 (т. е. ± 1, ± 7). Итак, рассмотрим четыре случая:

1) $a - 3 = 1$ (т. е. $a = 4$), тогда $x = \frac{7}{1} = 7$;

2) $a - 3 = -1$ (т. е. $a = 2$), тогда $x = \frac{7}{-1} = -7$;

3) $a - 3 = 7$ (т. е. $a = 10$), тогда $x = \frac{7}{7} = 1$;

4) $a - 3 = -7$ (т. е. $a = -4$), тогда $x = \frac{7}{-7} = -1$.

(*Ответ:* при $a = 4$ $x = 7$, при $a = 2$ $x = -7$, при $a = 10$ $x = 1$, при $a = -4$ $x = -1$.)

VI. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Решение других типов уравнений с использованием линейных уравнений

Цель: познакомить учащихся с другими типами уравнений.

Планируемые результаты: получить представление об уравнениях, сводящихся к линейным.

Тип урока: урок-исследование.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

План урока

1. Нелинейные уравнения.
2. Уравнения с модулем.
3. Уравнения с параметрами.

Рассмотрим другие типы уравнений, которые могут быть решены с использованием линейных уравнений.

1. Нелинейные уравнения

Пример 1

Уравнение $x(x-1)=0$ на основании распределительного свойства может быть записано в виде $x^2-x=0$ и является квадратным, так как содержит член x^2.

Квадратные уравнения вы будете изучать только в следующем классе. Однако данное уравнение легко решается. Его левая часть представляет собой произведение двух множителей. Это произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получаем $x=0$ или $x-1=0$ (откуда $x=1$). Следовательно, данное уравнение имеет два корня: $x=0$ и $x=1$.

Пример 2

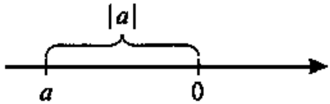
Уравнение $(3x-7)(x^2+1)(2x+3)=0$ является уравнением четвертой степени. Для его решения можно использовать тот же подход, что и в предыдущей задаче. Произведение трех множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем линейное уравнение $3x-7=0$ (его корень $x=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$), квадратное уравнение $x^2+1=0$ (которое, очевидно, корней не имеет) и линейное уравнение $2x+3=0$ (его корень $x=-\frac{3}{2}=-1{,}5$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x=2\frac{1}{3}$ и $x=-1{,}5$.

2. Уравнения с модулем

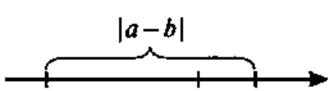
Прежде всего, напомним определение *модуля*. *Модулем* числа (выражения) a называется само это число (выражение) a, если оно неотрицательное, и число (выражение) $-a$, если число (выражение) a отрицательное. Модуль числа (выражения) обозначается символом $|a|$. Определение модуля можно записать короче:

$$|a|=\begin{cases}a, \text{ если } a\ge 0,\\ -a, \text{ если } a<0.\end{cases}$$

Величина $|a|$ имеет простой геометрический смысл – *расстояние от точки a на координатной оси до начала отсчета* (точки 0).



В задачах также часто встречается величина $|a-b|$. Ее геометрический смысл – *расстояние между точками a и b на координатной оси.*



Напомним *основные свойства модулей*, часто используемые при решении задач:

1. $|a| \geq 0$, т. е. модуль любого числа (выражения) – неотрицательное число (выражение). При этом $|a| = 0$ только при $a = 0$.

2. $|a| = |-a|$, т. е. модули противоположных чисел (выражений) равны.

3. $|a|^2 = a^2$, т. е. квадрат модуля числа (выражения) равен квадрату самого числа (выражения).

4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, т. е. модуль произведения двух чисел (выражений) равен произведению модулей этих чисел (выражений).

5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, т. е. модуль частного двух чисел (выражений) равен частному модулей этих чисел (выражений). При этом очевидно, что $b \neq 0$.

Теперь рассмотрим *уравнения с модулем*.

Пример 3

Решим уравнение $|2x - 5| = 0$.

Очевидно, что в соответствии со свойством 1 это равенство выполняется только в том случае, когда подмодульное выражение $2x - 5$ само равно нулю. Получаем линейное уравнение $2x - 5 = 0$ или $2x = 5$, откуда $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$ – единственный корень данного уравнения.

Пример 4

Решим уравнение $|3x + 8| = 1$.

Так как $|1| = 1$, то данное уравнение можно записать в виде $|3x + 8| = |1|$. Поскольку модули двух величин равны, то сами величины или равны, или противоположны по знаку (свойство 2).

Получаем два линейных уравнения:

а) $3x + 8 = 1$ или $3x = -7$, его корень $x = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$;

б) $3x + 8 = -1$ или $3x = -9$, его корень $x = -3$.

Итак, данное уравнение имеет два корня: $x = -2\frac{1}{3}$ и $x = -3$.

Пример 5

Решим уравнение $|5x + 1| = |3x - 9|$.

Вновь используем свойство 2: если модули двух величин равны, то сами величины или равны, или противоположны по знаку. Получаем два линейных уравнения:

а) $5x + 1 = 3x - 9$, или $5x - 3x = -1 - 9$, или $2x = -10$, его корень $x = -5$;

б) $5x + 1 = -(3x - 9)$, или $5x + 1 = -3x + 9$, или $5x + 3x = -1 + 9$, или $8x = 8$, его корень $x = 1$.

Итак, данное уравнение имеет два корня: $x = -5$ и $x = 1$.

Пример 6

Решим уравнение $|3x + 4| = x$.

Так как модуль некоторого выражения равен величине x, то в соответствии со свойством 1 эта величина $x \geq 0$. Для таких значений x подмодульное выражение $3x + 4 > 0$. Тогда по определению модуля $|3x + 4| = 3x + 4$. Данное уравнение имеет вид $3x + 4 = x$, или $3x - x = -4$, или $2x = -4$, откуда $x = -2$. Однако это значение не удовлетворяет условию $x \geq 0$ и не является корнем данного уравнения.

Итак, данное уравнение корней не имеет.

Пример 7

Решим уравнение $|5x| = 5x$.

На основании свойства 4 имеем $|5x| = |5| \cdot |x| = 5 \cdot |x|$. Тогда данное уравнение запишем в виде $5 \cdot |x| = 5 \cdot x$. Разделим обе части уравнения на число 5 и получим более простое уравнение $|x| = x$. Так как модуль некоторого выражения равен величине x, то в соответствии со свойством 1 эта величина $x \geq 0$. Для таких значений x подмодульное выражение $x \geq 0$. Тогда по определению модуля $|x| = x$. Данное уравнение имеет вид $x = x$. Очевидно, это равенство выполняется при всех значениях x. Но эти значения x должны удовлетворять условию $x \geq 0$. Поэтому все такие x являются решениями уравнения.

Итак, все неотрицательные числа будут решениями данного уравнения.

Более сложные уравнения с модулем пока рассматриваться не будут.

3. Уравнения с параметрами

В некоторые уравнения, помимо неизвестного x, входит еще одна переменная (параметр), которая может принимать произвольные значения. Как правило, в этих уравнениях требуется найти решение для любого значения параметра или исследовать решение уравнения (при этом иногда само решение находить не надо).

Пример 8

Найдем значение параметра a, при котором уравнение $(3a + 1) \cdot x = 2a + 6$ имеет корень $x = 2$.

Так как данное уравнение имеет корень $x = 2$, то при подстановке этого значения в уравнение получим верное равенство $(3a + 1) \cdot 2 = 2a + 6$. Это равенство является линейным уравнением для нахождения нужного значения a. Получаем, раскрывая скобки и решая линейное уравнение: $6a + 2 = 2a + 6$, или $6a - 2a = 6 - 2$, или $4a = 4$, откуда $a = 1$. Итак, при $a = 1$ данное уравнение имеет корень $x = 2$.

Это легко проверить. При подстановке значения $a = 1$ в данное уравнение оно имеет вид $(3 \cdot 1 + 1) \cdot x = 2 \cdot 1 + 6$ или $4x = 8$. Действительно, корень этого уравнения $x = 2$.

Пример 9

При каком значении параметра a уравнение $(2a - 4) \cdot x + + a - 1 = 4a - 7$ имеет три различных корня?

Прежде всего, запишем это линейное уравнение в стандартном виде. Для этого перенесем слагаемые, не зависящие от x, в правую часть уравнения и приведем подобные члены: $(2a - 4) \cdot x = 4a - a - 6$ или $(2a - 4) \cdot x = 3a - 6$. Известно, что линейное уравнение $c \cdot x = b$ имеет более одного корня (бесконечно много корней) только при условии $c = 0$ и $b = 0$, т. е. $2a - 4 = 0$ и $3a - 6 = 0$. Эти линейные уравнения имеют один и тот же корень $a = 2$.

Итак, при $a = 2$ данное уравнение $(2a - 4) \cdot x + a - 1 = 4a - 7$ имеет бесконечно много корней.

Поэтому три любых различных числа, например числа 5, –2, –7, будут корнями данного уравнения.

Пример 10

Решим уравнение $a(a - 2) \cdot x = 5(a - 2)$ при всех значениях параметра a.

Это линейное уравнение уже записано в стандартном виде $c \cdot x = b$, где $c = a(a - 2)$ и $b = 5(a - 2)$.

Далее вспомним три возможных случая решения линейного уравнения.

1. Если $c \neq 0$ (т. е. $a(a - 2) \neq 0$ или $a \neq 0$ и $a \neq 2$), то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{b}{c} = \frac{5(a-2)}{a(a-2)} = \frac{5}{a}$.

2. Если $c = 0$ при $a = 0$, то найдем значение $b = 5(a - 2) = -10$. Так как $c = 0$ и $b \neq 0$, то в этом случае уравнение решений не имеет.

3. Если $c = 0$ при $a = 2$, то найдем значение $b = 5(a - 2) = = 5(2 - 2) = 5 \cdot 0 = 0$. Так как $c = 0$ и $b = 0$, то в этом случае любое число x является корнем уравнения.

Итак, при $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $x = \frac{5}{a}$, при $a = 0$ решений нет, при $a = 2$ x – любое число.

Пример 11

При каких целых значениях параметра a корнем уравнения $(a-2)\cdot x=3$ является целое число?

Очевидно, что при $a=2$ данное линейное уравнение решений не имеет. При $a\neq 2$ уравнение имеет единственный корень $x=\frac{3}{a-2}$. Так как по условию число a – целое, то и число $a-2$ будет целым.

Корень $x=\frac{3}{a-2}$ будет целым числом, если число $a-2$ будет делителем числа 3. Число 3 имеет четыре делителя: ± 1, ± 3. Рассмотрим все возможные случаи: $a-2=1$ (тогда $a=3$), $a-2=-1$ (тогда $a=1$), $a-2=3$ (тогда $a=5$), $a-2=-3$ (тогда $a=-1$). Итак, только при целых значениях a, равных 3, 1, 5, –1, данное уравнение имеет целые корни.

III. Задания на уроке и на дом

1. Решите уравнение:

а) $|6x-5|=0$;
б) $|-2x+3|=0$;
в) $|6x-5|=7$;
г) $|3x-4|=-1$;
д) $|2x-1|=|3x+1|$;
е) $|3-4x|=|3x-2|$;
ж) $|-3x|=3x$;
з) $|-7x|=-7x$;
и) $|5x-2|=x-1$;
к) $|3x-1|=x-2$;
л) $|x-3|+|2x-6|=0$;
м) $|2-x|+|2x-4|=0$.

(*Ответы:*

а) $\frac{5}{6}$;
б) $\frac{3}{2}$;
в) $-\frac{1}{3}$ и 2;
г) корней нет;
д) –2 и 0;
е) $\frac{5}{7}$ и 1;
ж) $x\geq 0$;
з) $x\leq 0$;
и) корней нет;
к) корней нет;
л) 3;
м) 2.)

2. Решите уравнение:

а) $(x-5)(3x+4)=0$;
б) $(4-x)(2x+5)=0$;
в) $(2x-5)^2(x-1)=0$;
г) $(5-4x)^2(2-x)=0$;
д) $(3x-1)(2-4x)(x+1)^2=0$;
е) $(2-3x)(5x+2)(x+2)^2=0$;
ж) $(2-|3x-1|)(x+5)=0$;

з) $(3 - |2x - 5|)(x - 7) = 0$;
и) $(2x^2 + |x| + 3)(x - 4) = 0$;
к) $(3x^2 + 5 \cdot |x| + 2)(x + 6) = 0$.
(*Ответы:*

а) $-\frac{4}{3}$ и 5;
б) $-2{,}5$ и 4;
в) 1 и 2,5;
г) $\frac{5}{4}$ и 2;
д) $-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$;
е) $-2, -\frac{2}{5}, \frac{2}{3}$;
ж) $-5, -\frac{1}{3}, 1$;
з) 1, 4, 7;
и) 4
к) -6.)

3. Решите уравнение при всех значениях параметра:
а) $3x = a + 2$;
б) $4x = 6 - 5a$;
в) $ax = 2 - a$;
г) $2ax = 3 + a$;
д) $2(a - 3) \cdot x = 6(a - 3)$;
е) $3a(2 + a) \cdot x = 4(2 + a)$;
ж) $(a - 1)(2a + 4) \cdot x = 3a + 6$;
з) $(a + 2)(3a - 4) \cdot x = 6a - 8$;
и) $(ax - 2a)(x - 3)(4 + x) = 0$;
к) $(ax - 3a)(x - 2)(3 + x) = 0$.
(*Ответы:*

а) $\frac{a+2}{3}$;
б) $\frac{6-5a}{4}$;
в) при $a \neq 0$ $x = \frac{2-a}{a}$, при $a = 0$ решений нет;
г) при $a \neq 0$ $x = \frac{3+a}{2a}$, при $a = 0$ решений нет;
д) при $a \neq 3$ $x = 3$, при $a = 3$ x – любое число;
е) при $a \neq -2$ $x = \frac{4}{3}$, при $a = -2$ x – любое число;

ж) при $a \neq -2$ и $a \neq 1$ $x = \frac{3}{2(a-1)}$, при $a = -2$ x – любое число, при $a = 1$ решений нет;

з) при $a \neq -2$ и $a \neq \frac{4}{3}$ $x = \frac{2}{a+2}$, при $a = -2$ решений нет, при $a = \frac{4}{3}$ x – любое число;

и) при $a \neq 0$ $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, при $a = 0$ x – любое число;
к) при $a \neq 0$ $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, при $a = 0$ x – любое число.)

4. При каких значениях a число 3 является корнем уравнения?

а) $(2a - 1) \cdot x = a - 4$;

б) $(3 - a) \cdot x = 2a + 1$;

в) $(2a - 1) \cdot x = 6a - 3$;

г) $(3 - a) \cdot x = 5 - 3a$.

(*Ответы:* а) $-\frac{1}{5}$; б) $\frac{8}{5}$; в) при любых значениях a; г) таких значений a нет.)

5. При каких значениях a два уравнения имеют одинаковый корень?

а) $3x + 7 = 0$ и $2x - 5a = 0$;

б) $3x + 2 = 0$ и $ax - 5 = 0$.

Найдите этот корень.

(*Ответы:* а) при $a = -\frac{14}{15}$ $x = -\frac{7}{3}$; б) при $a = -7{,}5$ $x = -\frac{2}{3}$.)

6. При каких целых значениях a корнем уравнения будет целое число?

а) $(2a - 1) \cdot x = 3$;

б) $(2a + 1) \cdot x = 5$;

в) $(4a + 2) \cdot x = 3$;

г) $(2a + 4) \cdot x = 5$.

Найдите такие корни.

(*Ответы:*

а) при $a = -1$ $x = -1$, при $a = 0$ $x = -3$, при $a = 2$ $x = 1$, при $a = 1$ $x = 3$;

б) при $a = -3$ $x = -1$, при $a = 0$ $x = 5$, при $a = -1$ $x = -5$, при $a = 2$ $x = 1$;

в, г) таких значений a нет.)

7. При каких значениях параметра a уравнение:

а) $(2a + 3) \cdot x - 2a = 3(a + 2)$ имеет единственный корень;

б) $(2a + 3) \cdot x - 3a = 3(a + 3)$ имеет 11 различных корней;

в) $(2a + 3) \cdot x - 3a = 3(a + 2)$ не имеет корней?

(*Ответы:* а) при $a \neq -1{,}5$; б) при $a = -1{,}5$; в) при $a = -1{,}5$.)

8. Решите уравнение при всех значениях параметра a:

а) $\frac{x-2}{x-a} = 0$;

б) $\frac{2x+a}{x-1} = 0$;

в) $\frac{2x-3}{x-a} = 1$;

г) $\frac{x-3a}{x-2} = 2$.

(*Ответы:*

а) при $a \neq 2$ $x = 2$, при $a = 2$ решений нет;

б) при $a \neq -2$ $x = -\frac{a}{2}$, при $a = -2$ решений нет;

в) при $a \neq 1{,}5$ $x = 3 - a$, при $a = 1{,}5$ решений нет;

г) при $a \neq \frac{2}{3}$ $x = 4 - 3a$, при $a = \frac{2}{3}$ решений нет.)

IV. Подведение итогов урока

Факультативные уроки. Зачет по теме «Выражения. Преобразование выражений. Уравнения»

Цели: сравнить успеваемость учащихся при одинаковой сложности заданий; иметь возможность повысить оценки за выполненные контрольные работы.

Тип уроков: уроки контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Общая характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи представлены в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается 1 баллом, из блока В – 2 баллами, из блока С – 3 баллами. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Работа рассчитана на два урока.

III. Зачетная работа

Вариант 1

А

1. Найдите значение выражения $\frac{4a+3ab+7b}{a+2ab+5b}$ при $a = 2$, $b = 3$.

2. Укажите допустимые значения переменной в выражении $\frac{3a-4}{2(a-3)-(a+1)}+\frac{5a-4}{3(1-a)+4(a-2)}$.

3. Является ли равенство $3a + 4ab + 3b = 4ba + 3(b + a)$ тождеством и почему?

4. Решите уравнение $2(x - 3) = 7(2 - x)$.

5. Решите уравнение $2 \cdot |x - 5| = 4$.

6. Докажите, что уравнение $3 \cdot |x| + x^2 + 7 = 6$ не имеет решений.

7. Докажите, что уравнение $2x^2 + 5x + 1 = 0$ не имеет положительных корней.

B

8. Упростите выражение $1,7(2a - 3) + 0,6(3a - 1) - 0,4(a - 8)$.

9. Решите уравнение $|4 - x| = x - 4$.

10. Решите уравнение $(3x - 2)(2x - 4) = 0$.

11. Докажите, что уравнение $2(x - 3)^2 + 4 \cdot |x - 5| + 1 = 0$ не имеет решений.

C

12. Решите уравнение $3(x - 2)^2 + 4 \cdot |6 - 3x| = 0$.

13. При каких значениях параметра a уравнение $3ax = 5a - 3x + 5$ имеет корни 3, 7 и 15?

14. Докажите, что не существуют целые числа x и y, при которых выполняется равенство $(x + 3)(x + 4) = 8y + 5$.

Вариант 2

A

1. Найдите значение выражения $\frac{3a + 7ab + 5b}{2a + 3ab + 4b}$ при $a = 3$, $b = 2$.

2. Укажите допустимые значения переменной в выражении $\frac{5a - 3}{4(a - 2) - 3(a - 1)} - \frac{7a + 5}{4(1 - a) + 5(a - 3)}$.

3. Является ли равенство $7a + 2ab + 7b = 2ba + 7(b + a)$ тождеством и почему?

4. Решите уравнение $3(x - 4) = 5(3 - x)$.

5. Решите уравнение $3 \cdot |4 - x| = 6$.

6. Докажите, что уравнение $|x| + 2x^2 + 5 = 4$ не имеет решений.

7. Докажите, что уравнение $3x^2 + 7x + 2 = 0$ не имеет положительных корней.

B

8. Упростите выражение $2,7(3a + 5) + 0,4(2a - 3) - 0,6(a - 3)$.

9. Решите уравнение $|5 - x| = x - 5$.

10. Решите уравнение $(2x - 5)(3x - 4) = 0$.

11. Докажите, что уравнение $5(x - 4)^2 + 7 \cdot |x - 5| + 2 = 0$ не имеет решений.

C

12. Решите уравнение $2(x - 3)^2 + 5 \cdot |9 - 3x| = 0$.

13. При каких значениях параметра a уравнение $7ax = 4a - 7x + 4$ имеет корни 2, 5 и 17?

14. Докажите, что не существуют целые числа x и y, при которых выполняется равенство $(x + 5)(x + 6) = 6y + 3$.

IV. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

А

1. В выражение $\dfrac{4a+3ab+7b}{a+2ab+5b}$ подставим значения переменных $a=2$ и $b=3$. Получаем $\dfrac{4\cdot 2+3\cdot 2\cdot 3+7\cdot 3}{2+2\cdot 2\cdot 3+5\cdot 3}=\dfrac{8+18+21}{2+12+15}=\dfrac{47}{29}=1\dfrac{18}{29}$.

(*Ответ:* $1\dfrac{18}{29}$.)

2. Данное выражение имеет смысл, если знаменатели дробей не равны нулю, т. е. $2(a-3)-(a+1)\neq 0$ и $3(1-a)+4(a-2)\neq 0$. Упростим выражения в левых частях неравенств, раскрыв скобки и приведя подобные члены. Получаем $2a-6-a-1\neq 0$ и $3-3a+4a-8\neq 0$ или $a-7\neq 0$ и $a-5\neq 0$. Тогда $a\neq 7$ и $a\neq 5$.

(*Ответ:* $a\neq 7$ и $a\neq 5$.)

3. Покажем, что левая часть равенства тождественно равна правой. На основании переместительного и сочетательного свойств получаем $3a+4ab+3b=4ab+3b+3a=4ba+(3b+3a)$. На основании распределительного свойства имеем $4ba+(3b+3a)=4ba+{}$ $+3(b+a)$. Следовательно, данное равенство является тождеством.

(*Ответ:* является.)

4. В обеих частях уравнения $2(x-3)=7(2-x)$ раскроем скобки: $2x-6=14-7x$. В левую часть перенесем слагаемые, зависящие от x, в правую часть – числа. Получаем $2x+7x=14+6$. Приведем подобные члены: $9x=20$. Тогда $x=\dfrac{20}{9}=2\dfrac{2}{9}$.

(*Ответ:* $2\dfrac{2}{9}$.)

5. Обе части уравнения $2\cdot|x-5|=4$ разделим на число 2 и получим $|x-5|=2$. Так как модуль некоторой величины равен 2, то сама величина равна 2 или -2. Получаем два линейных уравнения: $x-5=2$ (тогда корень $x=7$) и $x-5=-2$ (корень $x=3$).

(*Ответ:* $x=7$ и $x=3$.)

6. Уравнение $3\cdot|x|+x^2+7=6$ запишем в виде $3\cdot|x|+{}$ $+x^2=-1$. Каждое слагаемое в левой части уравнения неотрицательно при любых значениях x (т. е. $3\cdot|x|\geq 0$ и $x^2\geq 0$). Поэтому сумма слагаемых также неотрицательна. Получаем противоречие: левая часть неотрицательна и равна отрицательному числу -1. Следовательно, при всех значениях x равенство не выполняется. Поэтому данное уравнение не имеет решений.

(*Ответ:* доказано.)

7. Пусть уравнение $2x^2+5x+1=0$ имеет положительный корень x. Тогда каждое слагаемое в левой части уравнения положительно, так как $3x^2>0$ и $5x>0$. Сумма положительных слагаемых является величиной положительной и не может равняться нулю. Получаем противоречие. Следовательно, данное уравнение не имеет положительных корней.

(*Ответ:* доказано.)

B

8. В данном выражении раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем $1{,}7(2a - 3) + 0{,}6(3a - 1) - 0{,}4(a - 8) = 3{,}4a - 5{,}1 + 1{,}8a - 0{,}6 - 0{,}4a + 3{,}2 = 4{,}8a - 2{,}5$.

(*Ответ:* $4{,}8a - 2{,}5$.)

9. При решении уравнения $|4 - x| = x - 4$ учтем, что при всех значениях x левая часть уравнения неотрицательна. Поэтому правая часть также должна быть неотрицательной: $x - 4 \geq 0$. Это условие выполняется при $x \geq 4$. При таких значениях x выражение $4 - x$, стоящее под знаком модуля, неположительное. Тогда по определению модуля $|4 - x| = -(4 - x) = x - 4$. Поэтому данное уравнение имеет вид $x - 4 = x - 4$ и выполняется при всех значениях x. Однако все рассуждения справедливы только при $x \geq 4$. Именно такие значения x и будут решениями уравнения.

(*Ответ:* $x \geq 4$.)

10. В уравнении $(3x - 2)(2x - 4) = 0$ произведение двух множителей равно нулю, поэтому один из множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $3x - 2 = 0$ (его корень $x = \frac{2}{3}$) и $2x - 4 = 0$ (корень $x = 2$).

(*Ответ:* $x = \frac{2}{3}$ и $x = 2$.)

11. В уравнении $2(x - 3)^2 + 4 \cdot |x - 5| + 1 = 0$ при всех значениях x два первых слагаемых неотрицательны, т. е. $2(x - 3)^2 \geq 0$ и $4 \cdot |x - 5| \geq 0$. Последнее слагаемое – положительное число. Сумма трех таких слагаемых – величина положительная и не может равняться нулю. Поэтому данное уравнение не имеет решений.

(*Ответ:* доказано.)

C

12. В уравнении $3(x - 2)^2 + 4 \cdot |6 - 3x| = 0$ каждое слагаемое при всех значениях x неотрицательно. Поэтому их сумма будет равняться нулю только в том случае, если каждое из них равно нулю, т. е. $3(x - 2)^2 = 0$ и $4 \cdot |6 - 3x| = 0$. Первое уравнение разделим на 3, второе – на 4. Получаем уравнения $(x - 2)^2 = 0$ и $|6 - 3x| = 0$. Если квадрат некоторой величины равен нулю, то и сама величина равна нулю, т. е. $x - 2 = 0$, откуда $x = 2$. Проверим подстановкой, что при таком значении x выполняется и второе уравнение: $|6 - 3 \cdot 2| = |6 - 6| = |0| = 0$, откуда $x = 2$.

(*Ответ:* $x = 2$.)

13. Линейное уравнение $3ax = 5a - 3x + 5$ запишем в стандартном виде: $3ax + 3x = 5a + 5$ или $3x(a + 1) = 5(a + 1)$. Если коэффициент при x не равен нулю (т. е. $a + 1 \neq 0$ или $a \neq -1$), то уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{5(a+1)}{3(a+1)} = \dfrac{5}{3}$ и условие задачи не выполняется. При $a = -1$ данное уравнение имеет вид $x \cdot 0 = 0$. Поэтому любое значение x является корнем уравнения.

Следовательно, в этом случае уравнение будет иметь корни 3, 7 и 15.

(*Ответ:* $a = -1$.)

14. Пусть существуют целые числа x и y, которые удовлетворяют уравнению $(x + 3)(x + 4) = 8y + 5$. Тогда числа $x + 3$ и $x + 4$ — два целых последовательных числа. Одно из этих чисел четное, и произведение $(x + 3)(x + 4)$ является четным числом. Число $8y = 2 \cdot 4y$ четное. Тогда сумма четного числа $8y$ и нечетного числа 5 будет числом нечетным. Получаем противоречие: левая часть уравнения — четное число, правая часть — нечетное. Следовательно, величины x и y не могут быть целыми числами.

(*Ответ:* доказано.)

Вариант 2

А

1. В выражение $\dfrac{3a + 7ab + 5b}{2a + 3ab + 4b}$ подставим значения переменных $a = 3$ и $b = 2$. Получаем $\dfrac{3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2} = \dfrac{9 + 42 + 10}{6 + 18 + 8} = \dfrac{61}{32} = 1\dfrac{29}{32}$.

(*Ответ:* $1\dfrac{29}{32}$.)

2. Данное выражение имеет смысл, если знаменатели дробей не равны нулю, т. е. $4(a - 2) - 3(a - 1) \neq 0$ и $4(1 - a) + 5(a - 3) \neq 0$. Упростим выражения в левых частях неравенств, раскрыв скобки и приведя подобные члены. Получаем $4a - 8 - 3a + 3 \neq 0$ и $4 - 4a + 5a - 15 \neq 0$ или $a - 5 \neq 0$ и $a - 11 \neq 0$. Тогда $a \neq 5$ и $a \neq 11$.

(*Ответ:* $a \neq 5$ и $a \neq 11$.)

3. Покажем, что левая часть равенства тождественно равна правой. На основании переместительного и сочетательного свойств получаем $7a + 2ab + 7b = 2ab + 7b + 7a = 2ba + (7b + 7a)$. На основании распределительного свойства имеем $2ba + (7b + 7a) = 2ba + 7(b + a)$.

Следовательно, данное равенство является тождеством.

(*Ответ:* является.)

4. В обеих частях уравнения $3(x - 4) = 5(3 - x)$ раскроем скобки: $3x - 12 = 15 - 5x$. В левую часть перенесем слагаемые, зависящие от x, в правую часть – числа. Получаем $3x + 5x = 12 + 15$. Приведем подобные члены $8x = 27$. Найдем $x = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$.

(*Ответ:* $3\frac{3}{8}$.)

5. Обе части уравнения $3 \cdot |4 - x| = 6$ разделим на число 3 и получим $|4 - x| = 2$. Так как модуль некоторой величины равен 2, то сама величина равна 2 или -2. Получаем два линейных уравнения: $4 - x = 2$ (тогда корень $x = 2$) и $4 - x = -2$ (корень $x = 6$).

(*Ответ:* $x = 2$ и $x = 6$.)

6. Уравнение $|x| + 2x^2 + 5 = 4$ запишем в виде $|x| + 2x^2 = -1$. Каждое слагаемое в левой части уравнения неотрицательное при любых значениях x (т. е. $|x| \geq 0$ и $2x^2 \geq 0$). Поэтому сумма слагаемых также неотрицательна. Получаем противоречие: левая часть неотрицательная и равна отрицательному числу -1. Следовательно, при всех значениях x равенство не выполняется. Поэтому данное уравнение не имеет решений.

(*Ответ:* доказано.)

7. Пусть уравнение $3x^2 + 7x + 2 = 0$ имеет положительный корень x. Тогда каждое слагаемое в левой части уравнения положительное, так как $3x^2 > 0$ и $7x > 0$. Сумма положительных слагаемых является величиной положительной и не может равняться нулю. Получаем противоречие. Следовательно, данное уравнение не имеет положительных корней.

(*Ответ:* доказано.)

В

8. В данном выражении раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем $2{,}7(3a + 5) + 0{,}4(2a - 3) - 0{,}6(a - 3) = 8{,}1a + 13{,}5 + 0{,}8a - 1{,}2 - 0{,}6a + 1{,}8 = 8{,}3a + 14{,}1$.

(*Ответ:* $8{,}3a + 14{,}1$.)

9. При решении уравнения $|5 - x| = x - 5$ учтем, что при всех значениях x левая часть уравнения неотрицательная. Поэтому правая часть также должна быть неотрицательной: $x - 5 \geq 0$. Это условие выполнятся при $x \geq 5$. При таких значениях x выражение $5 - x$, стоящее под знаком модуля, неположительное. Тогда по определению модуля $|5 - x| = -(5 - x) = x - 5$. Поэтому данное уравнение имеет вид $x - 5 = x - 5$ и выполняется при всех значениях x. Однако все рассуждения справедливы только при $x \geq 5$. Именно такие значения x и будут решениями уравнения.

(*Ответ:* $x \geq 5$.)

10. В уравнении $(2x - 5)(3x - 4) = 0$ произведение двух множителей равно нулю. Поэтому один из множителей равен нулю.

Получаем два линейных уравнения: $2x - 5 = 0$ (его корень $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$) и $3x - 4 = 0$ (корень $x = \frac{4}{3}$).

(*Ответ:* $x = 2{,}5$ и $x = \frac{4}{3}$.)

11. В уравнении $5(x - 4)^2 + 7|x - 5| + 2 = 0$ при всех значениях x два первых слагаемых неотрицательные, т. е. $5(x - 4)^2 \geq 0$ и $7|x - 5| \geq 0$. Последнее слагаемое – положительное число. Сумма трех таких слагаемых – величина положительная и не может равняться нулю. Поэтому данное уравнение не имеет решений.

(*Ответ:* доказано.)

C

12. В уравнении $2(x - 3)^2 + 5|9 - 3x| = 0$ каждое слагаемое при всех значениях x неотрицательное. Поэтому их сумма будет равняться нулю только в том случае, если каждое из них равно нулю, т. е. $2(x - 3)^2 = 0$ и $5|9 - 3x| = 0$. Первое уравнение разделим на 2, второе – на 5. Получаем уравнения $(x - 3)^2 = 0$ и $|9 - 3x| = 0$. Если квадрат некоторой величины равен нулю, то и сама величина равна нулю, т. е. $x - 3 = 0$, откуда $x = 3$. Проверим подстановкой, что при таком значении x выполняется и второе уравнение: $|9 - 3 \cdot 3| = |9 - 9| = |0| = 0$. Итак, данное уравнение имеет единственный корень $x = 3$.

(*Ответ:* $x = 3$.)

13. Линейное уравнение $7ax = 4a - 7x + 4$ запишем в стандартном виде: $7ax + 7x = 4a + 4$ или $7x(a + 1) = 4(a + 1)$. Если коэффициент при x не равен нулю (т. е. $a + 1 \neq 0$ или $a \neq -1$), то уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{4(a+1)}{7(a+1)} = \dfrac{4}{7}$ и условие задачи не выполняется. При $a = -1$ данное уравнение имеет вид $x \cdot 0 = 0$. Поэтому любое значение x является корнем уравнения. Следовательно, в этом случае уравнение будет иметь корни 2,5 и 17.

(*Ответ:* $a = -1$.)

14. Пусть существуют целые числа x и y, которые удовлетворяют уравнению $(x + 5)(x + 6) = 6y + 3$. Тогда числа $x + 5$ и $x + 6$ – два целых последовательных числа. Одно из этих чисел четное, и произведение $(x + 5)(x + 6)$ является четным числом. Число $6y = 2 \cdot 3y$ четное. Тогда сумма четного числа $6y$ и нечетного числа 3 будет числом нечетным. Получаем противоречие: левая часть уравнения – четное число, правая часть – нечетное. Следовательно, величины x и y не могут быть целыми числами.

(*Ответ:* доказано.)

V. Подведение итогов уроков

Глава II
ФУНКЦИИ

§ 5. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Урок 23. Что такое функция

Цель: дать представление о функции и об основных понятиях, связанных с ней.

Планируемые результаты: иметь представление о понятии функции.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

Очень часто рассматривается зависимость между различными величинами. Например, пройденный телом путь зависит от времени движения при постоянной скорости. Масса тела зависит от его объема и плотности материала. Сила притяжения между планетами зависит от их масс и расстояния между ними. Далее будут изучаться зависимости только *между двумя величинами*. Такие *зависимости* можно установить различными способами: с помощью *формулы* (или формул), с помощью *графика*, с помощью *таблицы*.

Пример 1

Машина движется по шоссе с постоянной скоростью 70 км/ч. За время t ч машина проходит путь $s = 70 \cdot t$ км. Легко вычислить пройденный путь за любое время:

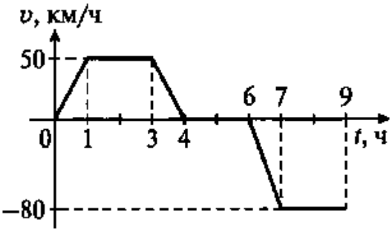
если $t = 1$, то $s = 70 \cdot 1 = 70$;

если $t = 1{,}5$, то $s = 70 \cdot 1{,}5 = 105$;

если $t = 3$, то $s = 70 \cdot 3 = 210$.

Зависимость переменной s от переменной t выражается формулой $s = 70 \cdot t$ (по смыслу задачи $t > 0$). При изменении величины t меняется также и величина s. Другими словами: в зависимости от времени t движения машины меняется и пройденный путь s. Такую зависимость $s = 70t$ называют *функцией*. При этом роль переменных s и t различна. Время движения t определяется только желанием водителя и называется *независимой переменной* или *аргументом*. Пройденный путь s определяется временем движения t (при скорости 70 км/ч) и называется *зависимой переменной*. При этом для каждого значения t можно найти только единственное значение s.

Пример 2



На рисунке изображен график скорости машины v в зависимости от времени t за время поездки. Видно, что в течение первого часа машина разгоняется до скорости 50 км/ч, в промежутке от 1 ч до 3 ч она движется с этой постоянной скоростью, от 3 ч до 4 ч – тормозит, и ее скорость уменьшается до нуля, от 4 ч до 6 ч – стоит (ее скорость равна нулю), от 6 ч до 7 ч – разгоняется до скорости 80 км/ч, но движется в противоположном направлении (скорость имеет отрицательный знак), от 7 ч до 9 ч – движется с этой скоростью.

С помощью этого графика можно найти скорость v машины в любой момент времени t (при $0 \le t \le 9$). Например, как видно из графика:

если $t = 0{,}5$, то $v = 25$;
если $t = 1{,}5$, то $v = 50$;
если $t = 5$, то $v = 0$;
если $t = 6{,}5$, то $v = -40$;
если $t = 8$, то $v = -80$.

При этом величину t мы можем выбирать произвольно (t – независимая переменная). От выбранного значения t зависит величина скорости v. Поэтому v – зависимая переменная. При этом для каждого значения t можно найти единственное значение v.

Пример 3

Рассмотрим таблицу квадратов y натуральных чисел x.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Такая таблица также задает функцию: для каждого значения x можно найти единственное значение y. Например, как видно из таблицы:

если $x = 2$, то $y = 4$;
если $x = 5$, то $y = 25$;
если $x = 9$, то $y = 81$.

Сформулируем на основании рассмотренных примеров более общее *определение функции*. Зависимость переменной y от переменной x называется функцией (или функциональной зависимостью), если каждому значению x соответствует единственное значение y. ***Переменную x называют независимой переменной (или аргументом), а переменную y – зависимой переменной.*** Чтобы подчеркнуть, что y зависит от x, обычно пишут так: $y(x)$ (читается: «y от x»). Все значения, которые может принимать независимая переменная x, образуют область определения функции. Все значения, которые при этом принимает зависимая переменная y (значения функции), образуют область значений (или область изменения) функции.

В примере 1 область определения функции $s(t)$ – все $t \geq 0$, область значений – все $s \geq 0$.

В примере 2 область определения функции $v(t)$ – все t из промежутка $0 \leq t \leq 9$, область значений – все v из промежутка $-80 \leq v \leq 50$.

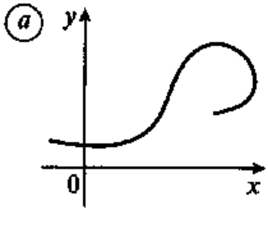
В примере 3 область определения функции $y(x)$ – значения x, равные 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, область значений – значения y, равные 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

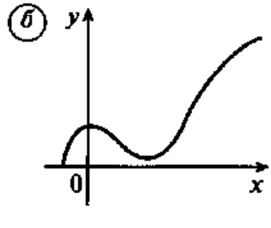
III. Задания на уроке

№ 258, 260, 261.

IV. Контрольные вопросы

– Приведите примеры функциональных зависимостей, укажите независимую и зависимую переменные.
– Дайте определение функции.
– Что называется областью определения и областью значений функции?
– На каком рисунке изображен график функции?





(*Ответ:* на рис. *б* изображен график функции, так как каждому значению x соответствует одно значение y, на рис. *а* существуют такие значения x, которым соответствуют два значения y.)

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 259, 262, 263, 264.

Уроки 24, 25. Вычисление значений функций по формуле

Цель: познакомить с аналитическим способом задания функции.

Планируемые результаты: научиться вычислять значение функции по формуле.

Тип уроков: урок-исследование, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение функции.

2. Приведите примеры функций, укажите независимую и зависимую переменные.

Вариант 2

1. Что называется областью определения и областью значений функции?

2. Приведите примеры функций, укажите независимую и зависимую переменные.

III. Работа по теме уроков

Способ задания функции *с помощью формулы* (формул) называется *аналитическим*. Он позволяет для любого значения аргумента найти соответствующее значение функции путем вычислений. Чтобы вычислить *значение функции $y(x)$ при $x = a$*, надо в формулу, задающую функцию, подставить данное *значение аргумента a и выполнить вычисления*. Такое значение функции обозначают *символом* $y(a)$.

Пример 1

Рассмотрим функцию $y(x) = x^3 + x$. Эта формула означает, что для вычисления величины y необходимо возвести в третью степень значение x и полученную величину сложить с самой величиной x. Например: $y(-2) = (-2)^3 + (-2) = -8 - 2 = -10$; $y(5) = 5^3 + 5 = 125 + 5 = 130$; $y(a) = a^3 + a$; $y(3a) = (3a)^3 + (3a) = 3^3 \cdot a^3 + 3a = 27a^3 + 3a$ и т. д. Функция может быть задана и с помощью нескольких формул.

Пример 2

Рассмотрим функцию

$$y(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ положительно}, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x \text{ отрицательно}. \end{cases}$$

Несмотря на некоторую непривычность, это выражение также задает функцию, и для любого значения x легко найти величину y. Например, $y\left(\frac{3}{7}\right) = 1$ (так как значение $x = \frac{3}{7}$ положительно, то используем первую строчку определения функции), $y(0) = 0$ (так как значение $x = 0$, то используем вторую строчку), $y(-2,3) = -1$ (так как значение $x = -2,3$ отрицательно, то используем третью строчку).

Пример 3

Рассмотрим функцию $y(x) = |x|$. Если учесть определение модуля числа (выражения), то эту функцию можно записать в следующем виде:

$$y(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \text{ неотрицательно}, \\ -x, \text{ если } x \text{ отрицательно}. \end{cases}$$

Для любого значения x можно найти y. Например, $y(3,7) = 3,7$ (так как значение $x = 3,7$ положительно, то используем первую строчку определения функции), $y(0) = 0$ (так как значение $x = 0$ неотрицательно, то вновь используем первую строчку), $y(-2,3) = -(-2,3) = 2,3$ (так как значение $x = -2,3$ отрицательно, то используем вторую строчку).

Достаточно часто приходится решать *обратную задачу — находить значение аргумента по известному значению функции.*

Пример 4

Функция задана формулой $y = 5x - 7$. Найдем, при каком значении аргумента x значение функции y равно 13.

Подставим значение $y = 13$ в формулу $y = 5x - 7$. Получаем линейное уравнение $13 = 5x - 7$. Решая его, получаем $x = 4$. Итак, при $x = 4$ значение $y = 13$.

Заметим, что для нахождения *значения функции при* $x = a$, *надо подставить эту величину* a *вместо* x *в формулу функции и выполнить вычисления*. Такие действия всегда легко выполнить. Для нахождения *значения аргумента* x *по известному значению* *функции* $y = b$ надо *подставить эту величину* b *вместо* y *в формулу функции*. Получается уравнение с неизвестной x, корни которого и являются требуемыми *значениями аргумента*. При этом иногда такое уравнение очень сложно решить.

(Пока учащиеся умеют решать только линейные уравнения.)

При задании функции ее *область определения* иногда *указывается*. Если она не указана, то *область определения* состоит из *всех значений аргумента*, при которых *формула для функции имеет смысл*.

Пример 5

а) Функция задана формулой $y = \dfrac{5}{(x-1)(x+3)}$, где $2 \le x \le 9$.

В этом примере область определения указана – все значения x из промежутка $2 \le x \le 9$.

б) Функция задана формулой $y = \dfrac{5}{(x-1)(x+3)}$. В этом случае область определения не указана.

Найдем значения аргумента x, при которых формула для функции имеет смысл. Так как эта формула представляет собой дробь, то ее знаменатель не может равняться нулю, т. е. $(x-1)(x+3) \ne 0$, откуда $x \ne 1$ и $x \ne -3$. Итак, область определения данной функции – все значения x, кроме чисел -3 и 1.

IV. Задания на уроках

№ 267, 269, 272 (а, б), 273, 276, 278.

V. Контрольные вопросы

– Какой способ задания функции называется аналитическим?
– Приведите примеры функций, заданных: а) одной формулой; б) двумя формулами; в) тремя формулами.
– Как найти значение функции по известному аргументу? Поясните на примере.
– Как найти значения аргумента, которому соответствует данное значение функции? Поясните на примере.
– Как найти область определения функции? Поясните на примере.

VI. Творческие задания

1. Какие формулы задают функцию?

а) $3x + 4 + 5 = 2y + x$;

б) $y^2 + 5x = 6$;

в) $y = \begin{cases} 1, \text{ если } x < 1, \\ 2, \text{ если } -1 \le x \le 2, \\ 3, \text{ если } x > 2; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} x, \\ x^2. \end{cases}$

(*Ответы:* а, в) задают функцию; б, г) — нет, так как одному значению аргумента x могут соответствовать два значения y: б) при $x = 1$ $y = \pm 1$, г) при $x = 2$ $y_1 = 2$ и $y_2 = 4$.)

2. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$;

б) $y = \dfrac{3x+5}{x-1} + \dfrac{2x}{x+3}$;

в) $y = \dfrac{2x-4}{(x-1)(x+3)}$;

г) $y = \begin{cases} 3x, \text{ если } -5 \le x \le 1, \\ 4 - x, \text{ если } 1 < x \le 9; \end{cases}$

д) $y = \begin{cases} 3x, \text{ если } -5 \le x \le 1, \\ 3 - x, \text{ если } 1 < x \le 9; \end{cases}$

е) $y = \begin{cases} x, \text{ если } -2 \le x \le -1, \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } -1 < x \le 2; \end{cases}$

ж) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } -2 \le x \le -1, \\ \dfrac{1}{|x|}, \text{ если } -1 < x \le 2. \end{cases}$

(*Ответы:* а) $x \ne 1$; б) $x \ne -3$ и $x \ne 1$; в) $x \ne -3$ и $x \ne 1$; г) $-5 \le x \le 9$; д) $-5 \le x \le 9$; е) $-2 \le x \le 2$ и $x \ne 0$; ж) $-2 \le x \le 2$ и $x \ne 0$.)

3. Объясните, почему перечисленные формулы не задают функцию. Как надо записать эти формулы, чтобы они определили функцию?

а) $y = \begin{cases} 2, \text{ если } x \le 5, \\ 6, \text{ если } x \ge 5; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x, \text{ если } -7 \le x \le -2, \\ 2x, \text{ если } -2 \le x \le 1, \\ 3x, \text{ если } 1 \le x \le 3. \end{cases}$

(*Ответы*:

а) При $x = 5$ существуют два значения y: 2 и 6. Поэтому одно значение надо устранить. Формулу можно записать в следующем виде:

$$y = \begin{cases} 2, \text{ если } x \le 5, \\ 6, \text{ если } x > 5, \end{cases} \quad \text{или} \quad y = \begin{cases} 2, \text{ если } x < 5, \\ 6, \text{ если } x \ge 5. \end{cases}$$

б) При $x = -2$ существуют два значения y: -2 и -4, при $x = 1$ также существуют два значения y: 2 и 3. По одному значению надо устранить. Формулу можно записать в следующем виде:

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } -7 \le x < -2, \\ 2x, \text{ если } -2 \le x \le 1, \\ 3x, \text{ если } 1 < x \le 3. \end{cases}$$

Возможны и другие варианты.)

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 268, 270, 272 (в, г), 275, 277, 279.

Уроки 26, 27. График функции

Цель: сформировать представление о графическом и табличном способах задания функции, построении графика функции.

Планирумые результаты: научиться составлять таблицы значений функции и строить график функции.

Тип уроков: урок изучения нового материала, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Приведите примеры функций, заданных:

а) одной формулой;

б) двумя формулами.

2. Функция задана формулой $y = -3x + 2$. Заполните пустые клетки таблицы.

x	-2		$0{,}5$		0	
y		-4		1		0

3. Найдите область определения функции $y = \dfrac{7x+3}{(2x-1)(x+2)}$.

Вариант 2

1. Приведите примеры функций, заданных:

а) одной формулой;

б) двумя формулами.

2. Функция задана формулой $y = -2x + 3$. Заполните пустые клетки таблицы.

x	-3		$0{,}5$		0	
y		-1		4		0

3. Найдите область определения функции $y = \frac{5x-2}{(3x-2)(x+3)}$.

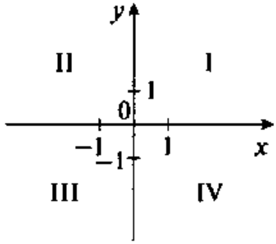
III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Прямоугольная система координат.
2. График функции.
3. Нахождение значения функции и значения аргумента.

1. Прямоугольная система координат

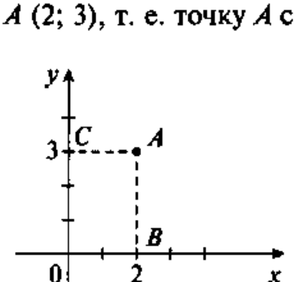
Перед тем как перейти к графическому и табличному способам задания функции, остановимся на *прямоугольной системе координат* и вспомним основные сведения. *Две взаимно перпендикулярные числовые оси образуют систему координат.* Прямые углы, образуемые осями координат, называют координатными углами (квадрантами) и нумеруют так, как показано на рисунке. Горизонтальная ось системы координат (ось Ox) называется осью абсцисс, вертикальная ось (ось Oy) – осью ординат.



Так же как на числовой оси может быть изображено любое число, так и любая пара чисел (x; y) (причем первое число обязательно x, второе – y) может быть изображена в прямоугольной системе координат.

Пример 1

Построим точку A (2; 3), т. е. точку A с координатами $x = 2$, $y = 3$.



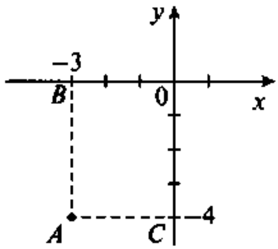
Отложим на оси абсцисс (ось Ox) число 2 (точка B) и восстановим из точки B перпендикуляр к оси Ox. Отложим на оси ординат (ось Oy) число 3 (точка C) и восстановим из точки C

перпендикуляр к оси Oy. Точка A пересечения этих двух перпендикуляров и будет искомой.

Также справедливо и обратное утверждение: любая точка, изображенная в системе координат, характеризуется парой чисел (координатами).

Пример 2

Найдем координаты точки A, изображенной на рисунке.



Из точки A опустим перпендикуляр на ось абсцисс и получим точку B, которой соответствует число $x = -3$.

Проведем из точки A перпендикуляр к оси ординат и получим точку C, которой соответствует число $y = -4$. Найденные значения x и y являются координатами точки A, т. е. точка A характеризуется парой чисел $(-3; -4)$. Пишут: $A\,(-3; -4)$.

2. График функции

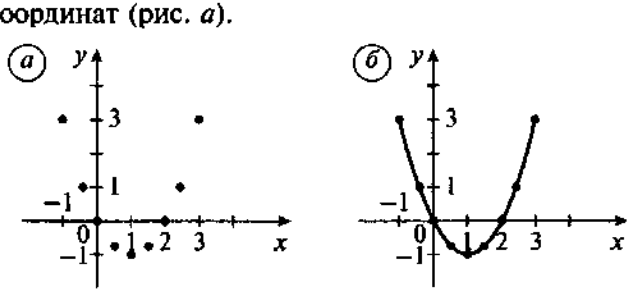
В прямоугольной системе координат для изображения функциональной зависимости $y(x)$ удобно пользоваться *специальным рисунком – графиком функции*.

Пример 3

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x$, где $-1 \le x \le 3$. Составим таблицу значений этой функции с шагом 0,5.

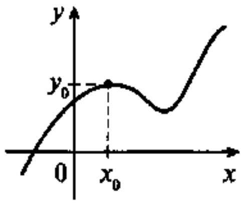
x	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	3	1,25	0	–0,75	–1	–0,75	0	1,25	3

Построим точки, заданные этими парами чисел $(x; y)$, в системе координат (рис. *а*).



Если при составлении таблицы шаг выбрать еще меньше, то получим больше пар значений (x; y). Каждой из этих пар также соответствует некоторая точка координатной плоскости. Все такие точки образуют график функции $y = x^2 - 2x$ на промежутке $-1 \le x \le 3$ (рис. *б*). На рисунке видно, что область определения данной функции – промежуток $-1 \le x \le 3$, область значений – промежуток $-1 \le x \le 3$.

Графиком функции $y(x)$ называют *множество всех точек* координатной плоскости, *абсциссы* которых *равны* значениям *независимой переменной* x, а *ординаты* – соответствующим значениям *зависимой переменной* y.



В силу такого определения все точки (x_0; y_0), которые *удовлетворяют* функциональной *зависимости* $y(x)$, *расположены на графике функции*. Любые *другие точки*, т. е. координаты которых не удовлетворяют зависимости $y(x)$, *не лежат на графике функции*.

Пример 4

Дана функция $y = x^2 + 2x - 1$. Принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: а) $(-1; -4)$; б) $(1; 3)$?

а) Найдем значение y при $x = -1$ для данной функции: $y(-1) = (-1)^3 + 2(-1) - 1 = -1 - 2 - 1 = -4$.

Так как $y(-1) = -4$, то точка $(-1; -4)$ с такой же ординатой принадлежит графику функции.

б) Найдем значение y при $x = 1$ для данной функции: $y(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$.

Так как $y(1) = 2$, то точка $(1; 3)$ с другой ординатой не принадлежит графику функции.

График дает наглядное представление о поведении функции: возрастании и убывании, нулях функции, областях определения и значений и т. д. Также с помощью графика функции по значению аргумента легко найти соответствующее значение функции. Легко решается и обратная задача – по данному значению функции найти те значения аргумента, которым оно соответствует.

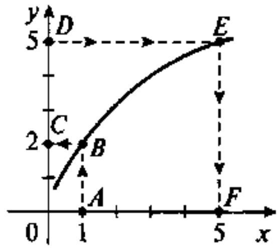
3. Нахождение значения функции и значения аргумента

Пример 5

По графику функции, изображенному на рисунке, найдем:

а) значение функции при $x = 1$;

б) значение аргумента, при котором значение функции $y = 5$.



а) На оси абсцисс отложим точку A, для которой $x = 1$. Из точки A восстановим перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком функции в точке B. Из точки B проведем перпендикуляр к оси ординат до пересечения с ней в точке C. Ордината точки C равна $y = 2$. Следовательно, при $x = 1$ значение данной функции $y = 2$.

б) На оси ординат отложим точку D, для которой $y = 5$. Из точки D проведем перпендикуляр к оси ординат до пересечения с графиком функции в точке E. Из точки E опустим перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с ней в точке F. Абсцисса точки F равна $x = 5$. Значит, данная функция принимает значение $y = 5$ при значении аргумента $x = 5$.

IV. Задания на уроках

№ 283, 285, 287, 289, 293.

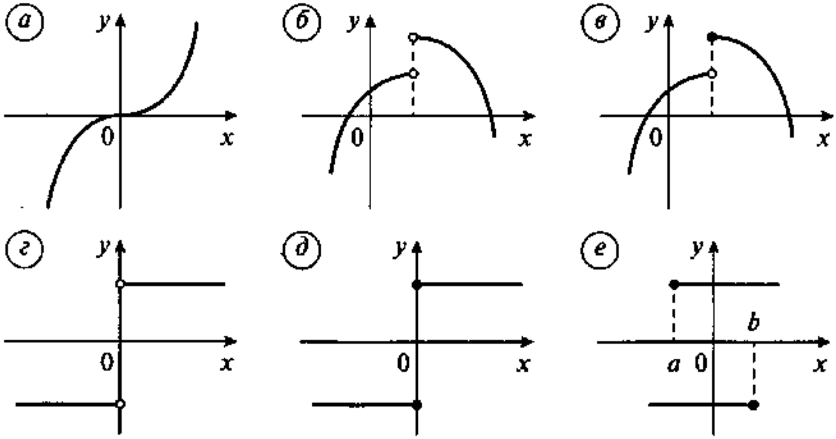
V. Контрольные вопросы

– На примере объясните, как построить точку на координатной плоскости.
– Объясните, как найти координаты точки, построенной на координатной плоскости.
– Что называется графиком функции?
– Как определить, принадлежит ли точка A (a; b) графику функции $y(x)$ или нет?
– На примере поясните, как найти значение функции по данному значению аргумента, используя график функции. Как решить обратную задачу – найти аргумент по известному значению функции?

VI. Творческие задания

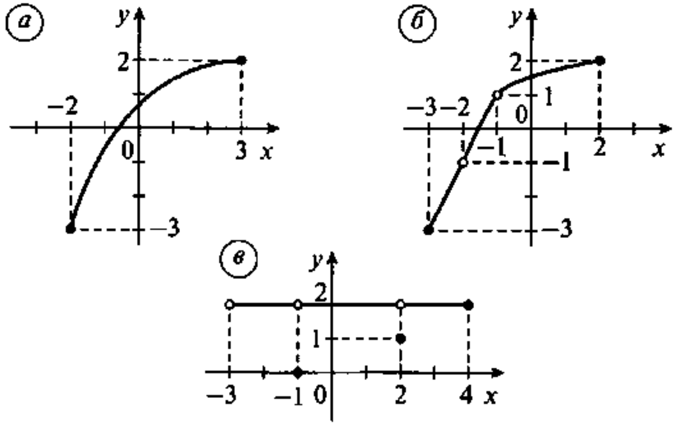
1. На каком рисунке изображен график функции?

Примечание: пустой кружок означает отсутствие точки, заполненный кружок – наличие.



(*Ответы: а–г* – графики функций, *д*, *е* – нет, так как для *д* при $x = 0$ есть два значения y, для *е* на промежутке $a \le x \le b$ есть два значения y.)

2. По графику функции найдите ее области определения и значений.



(*Ответы:*

а) область определения: $-2 \le x \le 3$, область значений: $-3 \le y \le 2$;

б) область определения: $-3 \le x < -2$, $-2 < x < -1$, $-1 < x \le 2$, область значений: $-3 \le y < -1$, $-1 < y < 1$, $1 < y \le 2$;

в) область определения: $-3 < x \le 4$, область значений: числа $y = 0, 1, 2$.)

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 284, 286, 288, 291, 292.

§ 6. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Уроки 28, 29. Прямая пропорциональность и ее график

Цель: рассмотреть прямую пропорциональную зависимость и ее график.

Планируемые результаты: научиться отличать прямую пропорциональность от других функций и строить ее график.

Тип уроков: урок-лекция, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Приведите пример функциональной зависимости одной переменной от другой. Укажите независимую и зависимую переменные.

2. Для функции $y = x^2 - 4$ (где $-3 \le x \le 3$) составьте таблицу значений аргумента и соответствующих значений функции с шагом 1. Постройте график функции.

Вариант 2

1. Приведите пример функциональной зависимости одной переменной от другой. Укажите независимую и зависимую переменные.

2. Для функции $y = 4 - x^2$ (где $-3 \le x \le 3$) составьте таблицу значений аргумента и соответствующих значений функции с шагом 1. Постройте график функции.

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Понятие прямой пропорциональности.
2. График прямой пропорциональной зависимости.

1. Понятие прямой пропорциональности

Очень часто приходится рассматривать функцию вида $y = kx$, где x – независимая переменная, k – число (не равное нулю). Такую функцию называют *прямой пропорциональностью* или *прямой пропорциональной зависимостью*. При этом число k называют *коэффициентом* прямой пропорциональности.

Из формулы $y = kx$ найдем значения функции при x_1 и x_2 (причем $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$) и получим $y_1 = kx_1$ и $y_2 = kx_2$. Почленно разделим эти равенства друг на друга и придем к пропорции $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$. Такая пропорция означает, что значение функции изменяется во столько же раз, во сколько раз меняется значение аргумента. С этим и связано название «прямая пропорциональность».

Пример 1

При растяжении пружины по закону Гука сила упругости F пропорциональна удлинению пружины l, т. е. $F = a \cdot l$ (где коэффициент a определяется материалом, толщиной, закалкой пружины и т. д.).

Пример 2

При движении машины с постоянной скоростью v пройденный путь s пропорционален времени движения t машины, т. е. $s = v \cdot t$.

2. График прямой пропорциональной зависимости

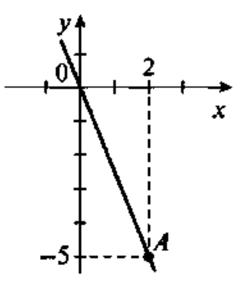
Графиком прямой пропорциональности $y = kx$ будет прямая, проходящая через начало координат.

Действительно, при $x = 0$ величина $y = k \cdot 0 = 0$ при любом значении k. Следовательно, график функции проходит через точку (0; 0) — начало координат. Поэтому *для построения графика* функции $y = k \cdot x$ достаточно взять еще *только одну точку*.

Пример 3

Построим график функции $y = -2{,}5x$.

Так как $y = -2{,}5x$ — прямая пропорциональная зависимость, то ее график проходит через начало координат. Найдем еще одну точку, расположенную на графике. Например, для $x = 2$ получаем $y = -2{,}5 \cdot 2 = -5$, искомая точка A (2; –5).



Построим эту точку на координатной плоскости. Через точку A и начало координат с помощью линейки проведем прямую линию, которая будет являться графиком данной функции.

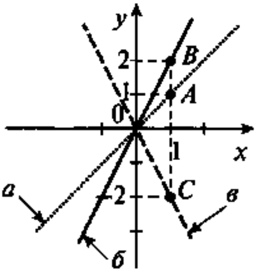
Пример 4

В одной и той же системе координат построим графики функций:

а) $y = x$;

б) $y = 2x$;

в) $y = -2x$.



Все три графика проходят через начало координат. Возьмем еще значение $x = 1$. Для функции *а* получаем $y = 1$ (точка A (1; 1)), для функции *б* $y = 2$ (точка B (1; 2)), для функции *в* $y = -2$ (точка C (1; −2)). Теперь построим эти три прямые *а*, *б*, *в*.

Видно, что *при положительных значениях* k (прямые *а* и *б*) *графики располагаются в первом и третьем координатных углах.* Причем чем больше значение k, тем быстрее меняется функция (больше угол наклона прямой к оси абсцисс).

При отрицательных значениях k (прямая *в*) *график располагается во втором и четвертом координатных углах.*

Таким образом, *коэффициент* k *характеризует расположение графика функции и скорость изменения функции* (угол наклона графика к оси абсцисс). Поэтому *коэффициент* k еще называется *угловым коэффициентом.*

IV. Задания на уроках

№ 298, 300 (а, б), 301, 304, 305 (д, е), 307.

V. Контрольные вопросы

– Какая функция называется прямой пропорциональной зависимостью?

– Приведите примеры прямых пропорциональных зависимостей.

– На что влияет угловой коэффициент k?

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 299, 300 (д, е), 302, 303, 306, 308, 309.

Уроки 30, 31. Линейная функция и ее график

Цель: рассмотреть линейную функцию и ее график, основные способы построения графика такой функции.

Планируемые результаты: научиться составлять таблицы значений линейных функций, строить их графики, представлять свойства функций.

Тип уроков: урок изучения нового материала, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Как расположен в координатной плоскости график функции $y = kx$, если $k > 0$?

2. График функции $y = kx$ проходит через точку A (2; –3). Найдите коэффициент пропорциональности k. Пройдет ли график этой функции через точку B (4; –5)?

3. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 2{,}5x$ и $y = -1{,}5x$.

Вариант 2

1. Как расположен в координатной плоскости график функции $y = kx$, если $k < 0$?

2. График функции $y = kx$ проходит через точку A (–3; –4). Найдите коэффициент пропорциональности k. Пройдет ли график этой функции через точку B (–6; –7)?

3. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 1{,}5x$ и $y = -2{,}5x$.

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Линейная функция.
2. Построение графика линейной функции.

1. Линейная функция

Функция $y = kx + b$ (где k и b – некоторые числа) называется *линейной функцией*. Обратите внимание на то, что в формулу $y = kx + b$ независимая *переменная x входит в степени не выше первой.*

Пример 1

а) Функции $y = 5x - 3$, $y = -2x + 5$, $y = 7x$, $y = -x$ являются линейными, так как в эти функции переменная x входит в первой степенн. Причем для первой функции $k = 5$, $b = -3$, для второй — $k = -2$, $b = 5$, для третьей — $k = 7$, $b = 0$, для четвертой — $k = -1$, $b = 0$.

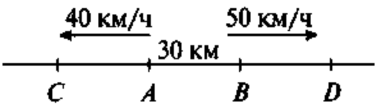
б) Функции $y = -3$, $y = 0$, $y = 5$ также являются линейными. Для всех функций $k = 0$. При этом для первой функции $b = -3$, для второй — $b = 0$, для третьей — $b = 5$.

в) Функции $y = 2x^2 - 3$, $y = \frac{3}{5x - 3}$, $y = \frac{2x + 5}{x}$ не являются линейными, так как в первую функцию переменная x входит во второй степени (x^2), вторая и третья функции вообще не описываются формулой $y = kx + b$ (хотя в эти функции аргумент x входит только в первой степени) и являются дробно-линейными.

г) Функция $y = |x|$ не является линейной, так как зависит не от x, а от $|x|$. Однако если рассматривать только неотрицательные значения x, то это линейная функция $y = x$ ($k = 1$, $b = 0$); если только отрицательные значения x, то это также линейная функция $y = -k$ ($k = -1$, $b = 0$). Значительное число задач приводит к возникновению линейных функций.

Пример 2

Первоначальное расстояние между машинами 30 км. Машины движутся по прямолинейному шоссе в противоположные стороны со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. Найдем расстояние между машинами через t ч.



Пусть сначала машины находились в точках A и B, расстояние между которыми $AB = 30$ км. Через t ч одна машина окажется в точке C, пройдя расстояние $AC = 40t$ км. Другая машина попадет в точку D, преодолев расстояние $BD = 50t$ км. Через t ч расстояние между машинами $s = CD = AC + AB + BD = 40t + 30 + 50t = 90t + 30$ км. Зависимость расстояния между машинами от времени имеет вид $s = 90t + 30$ (где $t \geq 0$), т. е. является линейной функцией ($k = 90$, $b = 30$).

Пример 3

Масса тела ребенка в возрасте до 5 лет каждый год увеличивается на 3 кг. При рождении малыш весил 4 кг. Найдем массу тела ребенка y кг в возрасте x лет.

За x лет масса тела ребенка возрастет на $3x$ кг. Учтем первоначальную массу тела малыша, тогда через x лет он будет весить $y = 4 + 3x$ кг. Зависимость массы тела ребенка y от его возраста x имеет вид $y = 3x + 4$ (где $0 \le x \le 5$), т. е. является линейной функцией ($k = 3$, $b = 4$).

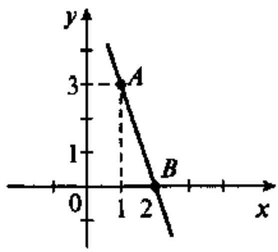
2. Построение графика линейной функции

Графиком линейной функции является прямая линия. Поэтому для построения графика достаточно *найти* любые *две точки*, принадлежащие графику, и *провести* через них *прямую*.

Пример 4

Построим график функции $y = -3x + 6$.

При $x = 1$ найдем $y(1) = -3 + 6 = 3$. Поэтому точка A (1; 3) принадлежит графику функции. Для $x = 2$ найдем $y(2) = -3 \cdot 2 + 6 = 0$. Точка B (2; 0) также принадлежит графику функции. На координатной плоскости построим эти точки A и B. С помощью линейки через точки A и B проведем прямую линию – график данной линейной функции.

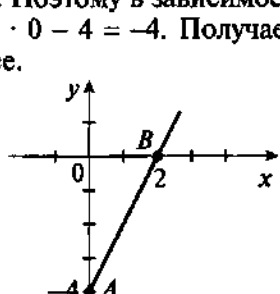


В качестве точек, через которые проходит график функции, обычно удобно брать *точки пересечения графика с осями координат.*

Пример 5

Построим график функции $y = 2x - 4$, найдя точки пересечения его с осями координат.

Найдем точку пересечения графика функции с осью ординат. Как известно, для любой точки, расположенной на оси ординат, абсцисса равна нулю. Поэтому в зависимости $y = 2x - 4$ положим $x = 0$ и найдем $y = 2 \cdot 0 - 4 = -4$. Получаем точку пересечения A (0; –4), построим ее.



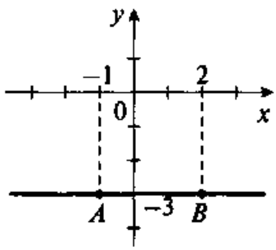
Теперь найдем точку пересечения графика с осью абсцисс. Любая точка на этой оси имеет ординату, равную нулю. Поэтому в зависимости $y = 2x - 4$ положим $y = 0$. Получаем линейное уравнение $0 = 2x - 4$, откуда $x = 2$. Имеем точку пересечения B (2; 0), построим ее. Через точки A и B проводим прямую линию — график данной функции.

Из рассмотренного примера понятен смысл величины b зависимости $y = kx + b$. Это *ордината точки, в которой график* функции *пересекает ось Oy*. Действительно, если положим $x = 0$, то получим $y = k \cdot 0 + b = b$ при всех значениях k. Это означает, что точка (0; b) принадлежит графику функции $y = kx + b$ и является точкой пересечения графика с осью ординат.

Ранее было показано, что величина k определяет наклон графика функции $y = kx + b$. При $k = 0$ такая прямая параллельна оси абсцисс (или совпадает с ней).

Пример 6

Построим график функции $y = -3$. При любом значении аргумента x значение функции равно одной и той же величине — $y = -3$.



Поэтому, например, точки A (−1; −3) и B (2; −3) принадлежат графику функции. Построим эти точки на координатной плоскости и проведем через них прямую линию. Получаем прямую, параллельную оси абсцисс.

Заметим, что прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = kx$.

IV. Задания на уроках

№ 313, 317, 319 (а, д), 322 (б, в), 323 (а).

V. Контрольные вопросы

– Какая функция является линейной? Приведите примеры.
– Что является графиком линейной функции? Как можно построить такой график?
– Как найти точки пересечения графика линейной функции с осями координат? Поясните на примере.
– Каков смысл величин k и b в формуле линейной функции?

– Какая прямая будет графиком линейной функции при $k = 0$?

VI. Творческие задания

1. График функции $y = kx + 3$ проходит через точку A. Найдите величину k, если:

а) A (2; 3); в) A (3; 4);
б) A (–1; –2); г) A (0; 3).

2. График функции $y = -2x + b$ проходит через точку A. Найдите величину b, если:

а) A (2; 1); б) A (1; –2); в) A (2; 4).

3. График функции $y = kx + b$ проходит через точки A и B. Найдите величины k и b, если:

а) A (0; 3) и B (2; 5);
б) A (0; 4) и B (3; 4);
в) A (0; 5) и B (2; –3).

4. Из приведенной зависимости выразите каждую переменную через все остальные:

а) $U = R \cdot I$; в) $F = m \cdot a$;
б) $v = v_0 + a \cdot t$; г) $v = \dfrac{s - s_0}{t}$.

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 314, 316, 318, 319 (в, г), 320, 322 (а, г), 323 (б).

Урок 32. Взаимное расположение графиков линейных функций

Цель: рассмотреть расположение графиков двух линейных функций.

Планируемые результаты: знать условия пересечения, параллельности, совпадения графиков линейных функций.

Тип урока: урок изучения нового материала.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Из зависимости $y = -3x + 4$ выразите переменную x через y.

2. Постройте график функции $y = -3x + 4$ двумя способами (выбирая две произвольные точки и точки пересечения с осями координат).

3. График функции $y = kx + b$ проходит через точки A (0; –4) и B (3; 5). Найдите величины k и b.

Вариант 2

1. Из зависимости $y = -4x + 3$ выразите переменную x через y.

2. Постройте график функции $y = -4x + 3$ двумя способами (выбирая две произвольные точки и точки пересечения с осями координат).

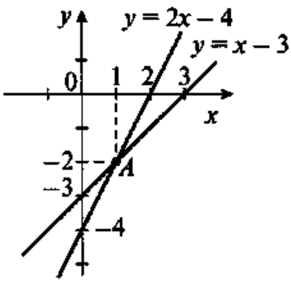
3. График функции $y = kx + b$ проходит через точки A (0; –2) и B (2; 6). Найдите величины k и b.

III. Работа по теме урока

Представим себе две прямые, построенные на координатной плоскости. Очевидно, возможны только *три случая их взаимного расположения*: или прямые пересекаются, или прямые параллельны, или прямые совпадают. Другой возможности представить себе нельзя. Рассмотрим эти три случая на примерах.

Пример 1

Построим графики линейных функций $y = x - 3$ и $y = 2x - 4$.

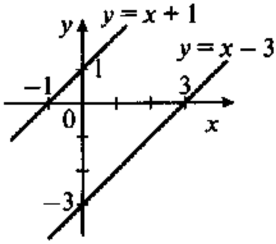


Видно, что построенные прямые пересекаются в точке A. Найдем координаты этой точки. Так как A – точка пересечения прямых, то ее координаты (x_0; y_0) удовлетворяют уравнению каждой прямой, т. е. выполняются (при подстановке в уравнения прямых) равенства $y_0 = x_0 - 3$ и $y_0 = 2 \cdot x_0 - 4$. Поскольку в этих равенствах левые части одинаковы, можно приравнять и правые: $x_0 - 3 = 2 \cdot x_0 - 4$. Из этого линейного уравнения находим абсциссу точки пересечения A – $x_0 = 1$. Тогда из любого равенства можно найти и ординату точки пересечения, например: $y_0 = x_0 - 3 = 1 - 3 = -2$. Итак, координаты точки пересечения A (1; –2).

Таким образом, если *угловые коэффициенты* k прямых $y = kx + b$ различны, то эти *прямые пересекаются*.

Пример 2

Построим графики линейных функций $y = x - 3$ и $y = x + 1$.



На рисунке видно, что прямые, заданные этими функциями, параллельны.

Таким образом, если *угловые коэффициенты* k прямых $y = kx + b$ *одинаковы*, а *значения* b *различны*, то эти *прямые параллельны*.

Пример 3

Построим графики функции $y = x - 3$ и функции, заданной уравнением $2y + x = 2x + y - 3$. Прежде всего из уравнения $2y + x = 2x + y - 3$ найдем зависимость $y(x)$. Для этого в левую часть равенства перенесем члены, зависящие от y, а в правую часть — все остальные члены уравнения. Получаем $2y - y = 2x - 3 - x$ или $y = x - 3$.

Теперь видно, что графики двух данных функций совпадают.

Таким образом, если *угловые коэффициенты* k *и величины* b прямых $y = kx + b$ *одинаковы*, то эти *прямые совпадают*.

Обоснуем выводы, сделанные на основании рассмотренных примеров. Пусть даны две линейные функции $y = k_1 \cdot x + b_1$ и $y = k_2 \cdot x + b_2$. Предположим, что они пересекаются в точке C с координатами $(x_0; y_0)$. Тогда эта точка лежит на каждой прямой и ее координаты удовлетворяют уравнению каждой прямой. Поэтому при подстановке значений x_0 и y_0 в уравнения прямых выполняются равенства $y_0 = k_1 \cdot x_0 + b_1$ и $y_0 = k_2 \cdot x_0 + b_2$.

Так как в этих равенствах левые части одинаковы, то можно приравнять и правые: $k_1 \cdot x_0 + b_1 = k_2 \cdot x_0 + b_2$. Получили линейное уравнение для нахождения абсциссы x_0 точки пересечения. Запишем его в следующем виде: $k_1 \cdot x_0 - k_2 \cdot x_0 = b_2 - b_1$ или $(k_1 - k_2) \cdot x_0 = b_2 - b_1$. При решении этого уравнения возможны три случая:

1. Если $k_1 - k_2 \neq 0$ (т. е. $k_1 \neq k_2$), то уравнение имеет единственное решение. Это означает, что прямые пересекаются (разумеется, в одной точке).

2. Если $k_1 - k_2 = 0$ (т. е. $k_1 = k_2$) и $b_2 - b_1 \neq 0$ (т. е. $b_1 \neq b_2$), то уравнение решений не имеет. Это означает, что прямые не пересекаются, т. е. параллельны.

3. Если $k_1 - k_2 = 0$ (т. е. $k_1 = k_2$) и $b_2 - b_1 = 0$ (т. е. $b_1 = b_2$), то уравнение имеет бесконечно много решений. Это означает, что прямые имеют бесконечно много общих точек, т. е. совпадают.

IV. Задания на уроке

№ 327 (а, б), 328, 330, 331, 335.

V. Контрольные вопросы

– Каково взаимное расположение двух прямых на плоскости?
– При каком условии графики двух линейных функций пересекаются?
– При каком условии графики линейных функций параллельны?
– При каком условии графики линейных функций совпадают?

VI. Творческие задания

1. При каких значениях параметров графики данных функций пересекаются?

а) $y = 2ax + 5$ и $y = 5x - 2$;
б) $y = (2a - 1) \cdot x$ и $y = (4a + 3) \cdot x + 2a$;
в) $y = 5ax - 4$ и $y = -ax + 3a$;
г) $y = (3a - 5) \cdot x + 6a$ и $y = (3a - 5) \cdot x$.

(*Ответы:* а) $a \neq 2{,}5$; б) $a \neq -2$; в) $a \neq 0$; г) таких значений a нет.)

2. При каких значениях параметров графики данных функций параллельны?

а) $y = 3ax + 5$ и $y = 6x - 2$;
б) $y = (3 - a) \cdot x + 1$ и $y = (a - 1) \cdot x + 5$;
в) $y = (a - 2) \cdot x + 2a$ и $y = (3 - 2a) \cdot x + a$;
г) $y = (a - 2) \cdot x + 6 - a$ и $y = (2a - 3) \cdot x + 2a + 3$.

(*Ответы:* а) $a = 2$; б) $a = 2$; в) $a = \frac{5}{3}$; г) таких значений a нет.)

3. При каких значениях параметров графики данных функций совпадают?

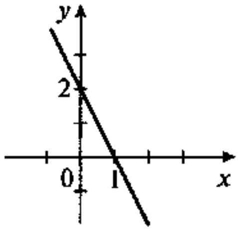
а) $y = 2ax + 7$ и $y = 4x + 7$;
б) $y = (5a - 3) \cdot x + 2a - 1$ и $y = 2ax + 5 - 4a$;

в) $y = (7 - 2a) \cdot x + 6a + 3$ и $y = (a + 1) \cdot x + 14 + a$;

г) $y = (5a - 3) \cdot x + 3a$ и $y = (5a + 1) \cdot x + 3a$.

(*Ответы:* а) $a = 2$; б) $a = 1$; в) таких значений a нет; г) таких значений a нет.)

4. На рисунке приведен график линейной функции. Какой из перечисленных функций он соответствует?

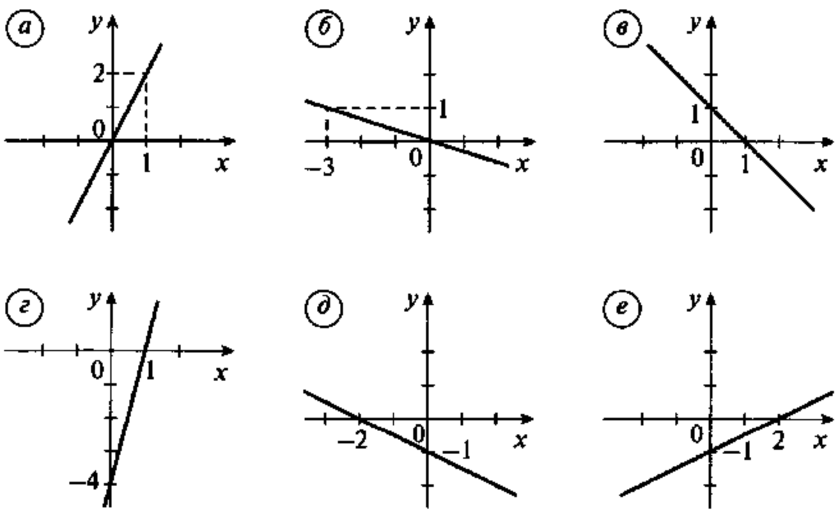


а) $y = 2x + 2$; в) $y = -2x + 2$;

б) $y = -2x + 1$; г) $y = -2x + 4$.

(*Ответ:* $y = -2x + 2$.)

5. На рисунках приведены графики некоторых линейных функций. Напишите формулы этих функций.



(*Ответы:* а) $y = 2x$; б) $y = -\frac{1}{3}x$; в) $y = -x + 1$; г) $y = 4x - 4$; д) $y = -\frac{1}{2}x - 1$; е) $y = \frac{1}{2}x - 1$.)

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 327 (в, г), 329, 332, 333, 334.

Урок 33. Контрольная работа № 3 по теме «Функции»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая зарактеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко, поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при выполнении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает учащимся некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 к набранным баллам добавляются дополнительно 0,5 балла, за решение задач вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (т. е. оценка «5» ставится уже за четыре задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Возможно, несколько труднее для учеников задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен ученикам (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий). При наличии такой техники в классе на стенде (после контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов.

Контрольная работа рассчитана на один урок.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Функция задана формулой $y = 2x + 3$. Принадлежат ли графику функции точки A (1; 5) и B (–1; –1)?

2. Постройте график функции $y = -4x + 3$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.

3. Постройте график зависимости $y = kx$, если он проходит через точку A (–2; 4). Найдите угловой коэффициент k.

4. При каком значении параметра a графики функций $y = 3x - 2$ и $y = 7 + (a - 2) \cdot x$ параллельны?

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 3$ и $y = 2x - 1$.

6. Постройте график зависимости $|y + 1| = 2$.

Вариант 2

1. Функция задана формулой $y = -2x + 5$. Принадлежат ли графику функции точки A (1; 3) и B (–1; 6)?

2. Постройте график функции $y = 3x + 4$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.

3. Постройте график зависимости $y = kx$, если он проходит через точку A (2; –6). Найдите угловой коэффициент k.

4. При каком значении параметра a графики функций $y = 5x + 3$ и $y = -4 + (a + 3) \cdot x$ параллельны?

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = -1$ и $y = 3x + 2$.

6. Постройте график зависимости $|y - 2| = 1$.

Вариант 3

1. Функция задана формулой $y = 2x^2 + |x| + 1$. Принадлежат ли графику функции точки A (1; 4) и B (–1; 5)? Найдите точку пересечения графика с осью ординат.

2. Постройте график функции $y = |x| - 1$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.

3. Постройте график функции $\dfrac{y+1}{x-1} = \dfrac{5-2x}{x-1}$.

4. При каком значении параметра a графики функций $y = 6x - 3$ и $y = (4a + 2)x - 2a - 1$ параллельны?

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = -2x$ и $y = 2x - 4$. Постройте эти графики.

6. Постройте график зависимости $|y + 2x| = 3$.

Вариант 4

1. Функция задана формулой $y = 2|x| - x^2 + 3$. Принадлежат ли графику функции точки A (1; 4) и B (–1; 3)? Найдите точку пересечения графика с осью ординат.

2. Постройте график функции $y = 1 - |x|$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.

3. Постройте график функции $\dfrac{y-1}{x+1} = \dfrac{3+2x}{x+1}$.

4. При каком значении параметра a графики функций $y = 4x + 5$ и $y = 1 - 2a - (3a + 2) \cdot x$ параллельны?

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 2x$ и $y = 6 - x$. Постройте эти графики.

6. Постройте график зависимости $|y - 3x| = 2$.

Вариант 5

1. График линейной функции $y = kx + b$ проходит через точки A (0; –3) и B (2; 0). Постройте график функции и определите функцию (найдите k и b).

2. Укажите координаты точек пересечения графика функции $y = 2x^2 + 3x$ с осями координат.

3. Найдите координаты точки графика функции $y = 3x - 7$, если эти координаты равны. Постройте график и укажите найденную точку.

4. Постройте график зависимости $|y - 2x + 1| = 2$.

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 7x - 31$ и $y = 2x - 6$.

6. Постройте график зависимости $|x + 1| + |x - 1| = 2$.

Вариант 6

1. График линейной функции $y = kx + b$ проходит через точки A (0; 2) и B (–3; 0). Постройте график функции и определите функцию (найдите k и b).

2. Укажите координаты точек пересечения графика функции $y = 3x^2 + 2x$ с осями координат.

3. Найдите координаты точки графика функции $y = -3x + 5$, если эти координаты равны. Постройте график и укажите найденную точку.

4. Постройте график зависимости $|y + 2x - 2| = 1$.

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 9x - 43$ и $y = 3x - 7$.

6. Постройте график зависимости $|y - 1| + |y + 1| = 2$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности.

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. Точка A принадлежит, B – не принадлежит.

2. A (0; 3) и $B\left(\frac{3}{4};0\right)$.

3. $k = -2$.

4. $a = 5$.

5. A (2; 3).

6. Прямые $y = 1$ и $y = -3$.

Вариант 2

1. Точка A принадлежит, B – не принадлежит.

2. A (0; 4) и $B\left(-\frac{4}{3};0\right)$.

3. $k = -3$.

4. $a = 2$.

5. A (–1; –1).

6. Прямые $y = 1$ и $y = 3$.

Вариант 3

1. Точка A принадлежит, B – не принадлежит, C (0; 1).

2. A (0; –1), B (–1; 0), C (1; 0).

3. Прямая $y = 4 - 2x$, где $x \neq 1$.

4. Таких значений a нет.

5. A (1; –2).

6. Прямые $y = -2x + 3$ и $y = -2x - 3$.

Вариант 4

1. Точка A принадлежит, B – не принадлежит, C (0; 3).

2. A (0; 1), B (–1; 0), C (1; 0).

3. Прямая $y = 2x + 4$, где $x \neq -1$.

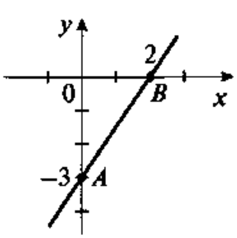
4. Таких значений a нет.

5. A (2; 4).

6. Прямые $y = 3x + 2$ и $y = 3x - 2$.

Вариант 5

1. Дано: A (0; –3) и B (2; 0) – точки пересечения графика линейной функции $y = kx + b$ с осями координат. Построим эти точки и проведем через них прямую.



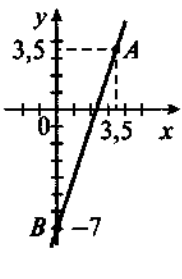
Так как прямая проходит через точку A, то подставим ее координаты в функцию и получим $-3 = k \cdot 0 + b$, откуда $b = -3$. Тогда функция имеет вид $y = kx - 3$. Подставим координаты точки B в функцию $0 = k \cdot 2 - 3$, откуда $k = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Значит, функция имеет вид $y = 1{,}5x - 3$.

(*Ответ:* $y = 1{,}5x - 3$.)

2. Найдем координаты точек пересечения графика функции $y = 2x^2 + 3x$ с осями координат. Для нахождения точек пересечения с осью абсцисс положим $y = 0$ и получим уравнение $0 = 2x^2 + 3x$. Используя распределительное свойство, запишем уравнение в виде $0 = x(2x + 3)$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем $x = 0$ и $2x + 3 = 0$ (откуда $x = -\frac{3}{2}$). Итак, имеем точки пересечения с осью абсцисс A (0; 0) и $B\left(-\frac{3}{2};0\right)$. Так как точка A – начало координат, то она одновременно является и точкой пересечения графика функции с осью ординат.

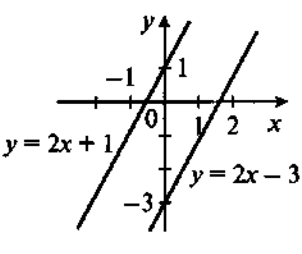
(*Ответ:* A (0; 0), $B\left(-\frac{3}{2};0\right)$.)

3. На графике функции $y = 3x - 7$ есть точка A, координаты которой равны, т. е. $x = a$ и $y = a$. Эти координаты должны удовлетворять уравнению функции. Подставив их, получаем $a = 3a - 7$, откуда $a = 3{,}5$. Итак, имеем точку A (3,5; 3,5). Построим график функции $y = 3x - 7$ и отметим на нем точку A.



(*Ответ:* A (3,5; 3,5).)

4. Построим график зависимости $|y - 2x + 1| = 2$.



Если модуль некоторой величины равен 2, то сама величина может равняться 2 или −2. Рассмотрим эти случаи.

Если $y - 2x + 1 = 2$, то $y = 2x + 1$;

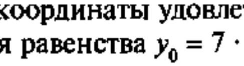
если $y - 2x + 1 = -2$, то $y = 2x - 3$.

Построим две параллельные прямые $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 3$, которые являются графиком данной зависимости.

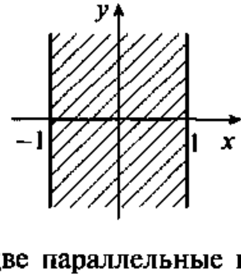
5. Пусть A $(x_0; y_0)$ – точка пересечения графиков функций $y = 7x - 31$ и $y = 2x - 6$. Так как точка A принадлежит графику каждой функции, то и ее координаты удовлетворяют каждой функции, т. е. выполняются равенства $y_0 = 7 \cdot x_0 - 31$ и $y_0 = 2 \cdot x_0 - 6$. В этих равенствах одинаковые левые части, поэтому приравняем правые части. Получаем уравнение $7 \cdot x_0 - 31 = 2 \cdot x_0 - 6$ для нахождения абсциссы точки пересечения. Запишем уравнение в виде $7 \cdot x_0 - 2 \cdot x_0 = 31 - 6$ или $5 \cdot x_0 = 25$ и найдем $x_0 = 5$. Теперь из любого уравнения, например из первого, определяем $y_0 = 7 \cdot x_0 - 31 = 7 \cdot 5 - 31 = 4$. Итак, координаты точки A (5; 4).

(***Ответ:*** A (5; 4).)

6. При построении графика зависимости $|x + 1| + |x - 1| = 2$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|x + 1| = |x - (-1)|$ – расстояние от точки x до точки −1 на координатной оси, величина $|x - 1|$ – расстояние от точки x до точки 1.



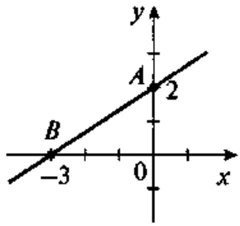
Тогда геометрический смысл выражения $|x + 1| + |x - 1|$ – сумма расстояний от точки x до точек −1 и 1. На рисунке видно, что сумма таких расстояний будет равна 2, если точка x располагается между точками −1 и 1 на координатной оси, т. е. $-1 \le x \le 1$. Теперь на координатной плоскости построим множество таких точек.



Сначала строим две параллельные прямые $x = -1$ и $x = 1$ (границы области). При этом координата y может быть любой. Тогда условию $-1 \le x \le 1$ удовлетворяют все точки плоскости, расположенные между построенными прямыми $x = -1$ и $x = 1$ и на них (эти точки заштрихованы).

Вариант 6

1. Дано: A (0; 2) и B (–3; 0) – точки пересечения графика линейной функции $y = kx + b$ с осями координат. Построим эти точки и проведем через них прямую.



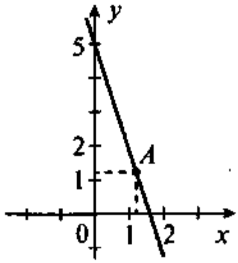
Так как прямая проходит через точку A, то подставим ее координаты в функцию и получим $2 = k \cdot 0 + b$, откуда $b = 2$. Тогда функция имеет вид $y = kx + 2$. Подставим координаты точки B в эту функцию: $0 = k \cdot (-3) + 2$, откуда $k = \frac{2}{3}$. Значит, функция имеет вид $y = \frac{2}{3}x + 2$.

(*Ответ:* $y = \frac{2}{3}x + 2$.)

2. Найдем координаты точек пересечения графика функции $y = 3x^2 + 2x$ с осями координат. Для нахождения точек пересечения с осью абсцисс положим $y = 0$ и получим уравнение $0 = 3x^2 + 2x$. Используя распределительное свойство, запишем уравнение в виде $0 = x(3x + 2)$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем $x = 0$ и $3x + 2 = 0$ (откуда $x = -\frac{2}{3}$). Итак, точки пересечения с осью абсцисс A (0; 0) и $B\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. Так как точка A – начало координат, то она одновременно является и точкой пересечения графика функции с осью ординат.

(*Ответ:* A (0; 0) и $B\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.)

3. На графике функции $y = -3x + 5$ есть точка A, координаты которой равны, т. е. $x = a$ и $y = a$. Эти координаты удовлетворяют уравнению функции. Подставим их, получаем $a = -3a + 5$, откуда $a = \frac{5}{4}$. Итак, имеем точку $A\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$. Построим график функции $y = -3x - 5$ и отметим на нем точку A.



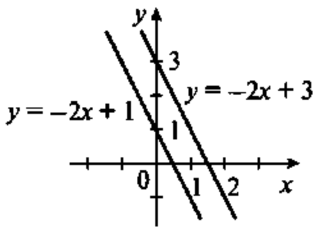
(*Ответ:* $A\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$.)

4. Построим график зависимости $|y + 2x - 2| = 1$. Если модуль некоторой величины равен 1, то сама величина может равняться 1 или −1. Рассмотрим эти случаи.

Если $y + 2x - 2 = 1$, то $y = -2x + 3$;

если $y + 2x - 2 = -1$, то $y = -2x + 1$.

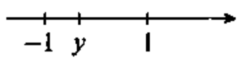
Построим две параллельные прямые $y = -2x + 3$ и $y = -2x + 1$, которые являются графиком данной зависимости.



5. Пусть A $(x_0; y_0)$ – точка пересечения графиков функций $y = 9x - 43$ и $y = 3x - 7$. Так как точка A принадлежит графику каждой функции, то и ее координаты удовлетворяют каждой функции, т. е. выполняются равенства $y_0 = 9 \cdot x_0 - 43$ и $y_0 = 3 \cdot x_0 - 7$. В этих равенствах одинаковые левые части, поэтому приравняем правые части. Получаем уравнение $9 \cdot x_0 - 43 = 3 \cdot x_0 - 7$ для нахождения абсциссы точки пересечения. Запишем уравнение в виде $9 \cdot x_0 - 3 \cdot x_0 = 43 - 7$ или $6 \cdot x_0 = 36$ и найдем $x_0 = 6$. Теперь из любого уравнения, например из первого, определяем $y_0 = 9 \cdot x_0 - 43 = 9 \cdot 6 - 43 = 11$. Итак, координаты точки A (6; 11).

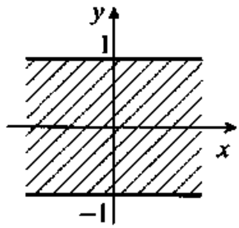
(*Ответ:* A (6; 11).)

6. При построении графика зависимости $|y - 1| + |y + 1| = 2$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|y - 1|$ – расстояние от точки y до точки 1 на координатной оси, величина $|y + 1| = |y - (-1)|$ – расстояние от точки y до точки −1.



Тогда геометрический смысл выражения $|y-1|+|y+1|$ – суммарное расстояние от точки y до точек 1 и –1.

На рисунке видно, что сумма таких расстояний будет равна 2, если точка y располагается между точками –1 и 1 на координатной оси, т. е. $-1 \le y \le 1$. Теперь на координатной плоскости построим множество таких точек.



Сначала строим две параллельные прямые $y=-1$ и $y=1$ (границы области). При этом координата x может быть любой. Тогда условию $-1 \le y \le 1$ удовлетворяют все точки плоскости, расположенные между построенными прямыми $y=-1$ и $y=1$ и на них (эти точки заштрихованы).

VI. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Построение графиков более сложных функций

Цель: рассмотреть графики более сложных функций.

Планируемые результаты: научиться строить графики функций, сводящихся к линейным функциям.

Тип урока: урок-исследование.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

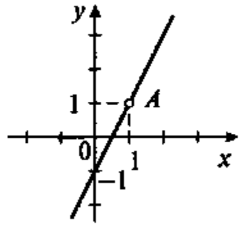
II. Работа по теме урока

Навыки построения графиков линейных функций позволяют строить и графики более сложных зависимостей.

Пример 1

Построим график функции $\frac{y}{x-1}=\frac{2x-1}{x-1}$.

Отметим, что функция имеет смысл только при $x \ne 1$, так как делить на нуль нельзя. Поскольку дроби $\frac{y}{x-1}$ и $\frac{2x-1}{x-1}$ равны и имеют одинаковые знаменатели, то и числители этих дробей равны, т. е. $y = 2x - 1$.

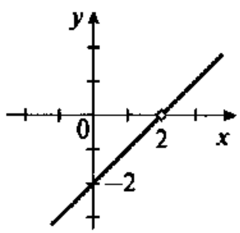


Построим график этой функции и учтем, что $x \neq 1$. Поэтому из графика удалим точку A, для которой абсцисса $x = 1$ (пустой кружок означает отсутствие точки). Область определения этой функции – все числа, кроме $x = 1$, область значений – все числа, кроме $y = 1$.

Пример 2

Построим график функции $\dfrac{y + x - 2}{2x - 4} = 1$.

Учтем, что $2x - 4 \neq 0$ (т. е. $x \neq 2$). Умножим обе части данного равенства на выражение $(2x - 4)$ и получим $y + x - 2 = 2x - 4$. Выразим из этого равенства $y = x - 2$. Построим график данной линейной функции и учтем, что $x \neq 2$ (удаленная точка обозначена пустым кружком).

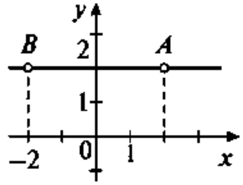


Область определения данной функции – все числа, кроме $x = 2$, область значений – все числа, кроме $y = 0$.

Пример 3

Построим график функции $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{y+x}{x+2} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

Учтем, что $x - 1 \neq 0$ (т. е. $x \neq 1$) и $x + 2 \neq 0$ (т. е. $x \neq -2$). Из обеих частей равенства вычтем величину $\dfrac{1}{x-1}$ и получим $\dfrac{y+x}{x+2} = 1$. Умножим обе части этого равенства на величину $x + 2$ и получим $y + x = x + 2$ или $y = 2$. Построим данную прямую, параллельную оси абсцисс.

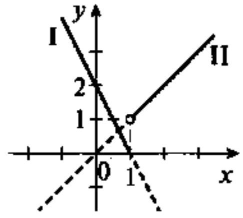


Из этой прямой удалим точку A (для которой $x = 1$) и точку B (для которой $x = -2$). Область определения этой функции – все числа, кроме $x = -2$ и $x = 1$, область значений – число $y = 2$.

Пример 4

Построим график функции $y = \begin{cases} -2x + 2, \text{ если } x \le 1, \\ x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

Сначала построим график функции $y = -2x + 2$ (прямая I) и выберем из него участок, для которого абсциссы $x \le 1$ (сплошная линия). Также построим график $y = x$ (прямая II) и выберем из него часть, для которой абсцисса $x > 1$ (сплошная линия).

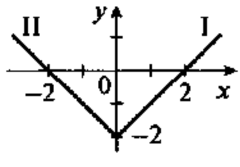


Область определения данной функции – все числа, область значений – неотрицательные числа y.

Пример 5

Построим график функции $y = |x| - 2$.

Используя определение модуля числа, запишем данную функцию в следующем виде: $y = \begin{cases} x - 2, \text{ если } x \ge 0, \\ -x - 2, \text{ если } x < 0. \end{cases}$



Аналогично предыдущему примеру для значений $x \ge 0$ построим график функции $y = x - 2$ (прямая I), для значений $x < 0$ строим график функции $y = -x - 2$ (прямая II). Область определения данной функции – все числа x, область значений – числа $y \ge -2$.

III. Задания на уроке и на дом

Постройте графики функций. Укажите области определения и значений. Найдите точки пересечения графика с осями координат.

1) $3y + 2x = y + x + 1$;

2) $5y + 2x = 4y + 3x + 2$;

3) $\dfrac{y+x}{2x-3} = 1$;

4) $\dfrac{y+2}{x-1} = 3$;

5) $\dfrac{y-3}{x+1} + \dfrac{5x-1}{x-2} = 1 + \dfrac{5x-1}{x-2}$;

6) $\dfrac{2x}{x-1} + \dfrac{y+2}{x-2} = 2 + \dfrac{2x}{x-1}$;

7) $\dfrac{x-1}{y+x} = 1$;

8) $\dfrac{x+1}{y+x-1} = 1$;

9) $\dfrac{3x-1}{y+x} = 1$;

10) $\dfrac{3x+1}{y+x-1} = 1$;

11) $y = \begin{cases} 1, \text{ если } x \geq 2, \\ 2, \text{ если } x < 2; \end{cases}$

12) $y = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

13) $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x < 1, \\ x-2, \text{ если } x \geq 1; \end{cases}$

14) $y = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \leq 1, \\ x-3, \text{ если } x > 1; \end{cases}$

15) $y = |x|$;

16) $y = 1 - |x|$;

17) $y = |x| + x$;

18) $y = |x| - x$;

19) $y = |x| + 2x - 1$;

20) $y = 3x - |x| + 1$;

21) $y = \dfrac{|x|-1}{|x|-1}$;

22) $y = \dfrac{|x|}{x} - \dfrac{x}{|x|} - 1$.

IV. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Понятие о графике уравнения

Цель: рассмотреть графики уравнений.

Планируемые результаты: научиться строить графики простейших уравнений.

Тип урока: урок-исследование.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

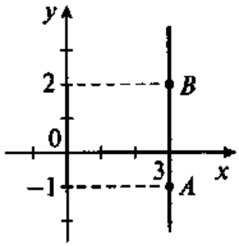
II. Работа по теме урока

До сих пор мы рассматривали только *функциональные зависимости* (функции). В таких зависимостях *каждому значению*

переменной x соответствовало только одно значение переменной y. В математике встречаются и такие *зависимости между переменными x и y*, при которых одному значению x может соответствовать *не одно*, а *множество значений y*. Множество точек $(x; y)$, связанных такой зависимостью, можно изобразить на координатной плоскости. В этом случае говорят о *графике уравнения*.

Пример 1

На координатной плоскости изобразите множество таких точек $(x; y)$, которые удовлетворяют уравнению $x = 3$.



Видно, что в уравнение $x = 3$ переменная y не входит. Поэтому любое значение y будет удовлетворять данному уравнению. Возьмем, например, точки A (3; −1) и B (3; 2). Координаты этих точек удовлетворяют уравнению, поэтому такие точки принадлежат искомому графику. Через точки A и B проведем прямую линию. Эта прямая параллельна оси ординат и является графиком уравнения $x = 3$.

Заметим, что раньше мы строили графики функций $y = a$ (где a – некоторое число) и получали прямые, параллельные оси абсцисс. Поэтому построенный график аналогичен рассмотренным раньше.

Отметим, что этот график является именно графиком уравнения (а не функции), так как одному значению переменной x соответствует бесконечно много значений переменной y.

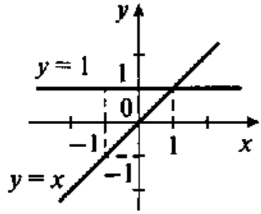
Пример 2

На координатной плоскости изобразите множество таких точек $(x; y)$, которые удовлетворяют уравнению $(y - 1)(y - x) = 0$.

Сначала из данного уравнения найдем величину y. Если произведение двух множителей равно нулю, то либо первый множитель равен нулю, либо второй. Поэтому рассмотрим два случая:

1) $y - 1 = 0$, отсюда $y = 1$. Построим эту прямую, параллельную оси абсцисс;

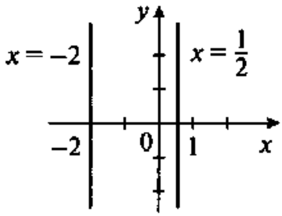
2) $y - x = 0$, отсюда $y = x$. Построим график этой прямой пропорциональной зависимости (биссектриса первого и третьего координатных углов).



Две пересекающиеся прямые $y = 1$ и $y = x$ и являются графиками данного уравнения. Разумеется, построенный график является именно графиком уравнения, а не графиком функции. Например, как видно на рисунке, одному значению $x = -1$ соответствуют два различных значения y: $y = -1$ и $y = 1$.

Пример 3

Построим график уравнения $(2x - 1)(2x + 4) = 0$.

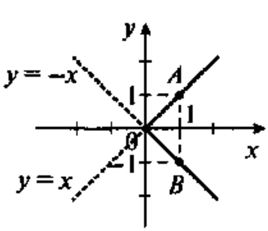


Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из множителей должен равняться нулю. Получаем $2x - 1 = 0$ (откуда $x = \frac{1}{2}$) и $2x + 4 = 0$ (откуда $x = -2$). Построим две прямые $x = \frac{1}{2}$ и $x = -2$, параллельные оси ординат, и получим график данного уравнения.

Пример 4

Построим график уравнения $|y| = x$.

Для этого раскроем в уравнении модуль, рассмотрев два случая. Если $y \geq 0$, то уравнение имеет вид $y = x$. Построим прямо пропорциональную зависимость $y = x$ и выберем такие точки на этой прямой, для которых ордината $y \geq 0$ (сплошная прямая).



Если $y < 0$, то уравнение имеет вид $-y = x$ или $y = -x$. Построим график данной зависимости. Выберем на этой прямой такие точки, для которых ордината $y < 0$ (сплошная прямая).

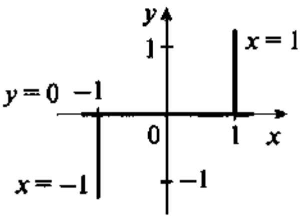
Таким образом, графиком данного уравнения будет ломаная AOB.

Пример 5

Построим график уравнения $y = x \cdot |y|$.

Сначала найдем более простую связь между переменными x и y. Запишем уравнение в виде $0 = x \cdot |y| - y$ и раскроем знак модуля, рассмотрев два случая:

1. Если $y \geq 0$, то уравнение имеет вид $0 = y(x - 1)$. Это уравнение выполняется, если $y = 0$ или $x = 1$. Величина $y = 0$ удовлетворяет условию $y \geq 0$. Построим эту прямую (ось абсцисс).



Из графика зависимости $x = 1$ выберем такие точки, для которых ордината $y \geq 0$.

2) Если $y < 0$, то уравнение имеет вид $0 = -xy - y$. Так как $y \neq 0$, то разделим все члены уравнения на y и получим $0 = -x - 1$, откуда $x = -1$. Построим эту прямую $x = -1$ и из графика выберем такие точки, для которых ордината $y < 0$.

Таким образом, график данного уравнения состоит из оси абсцисс ($y = 0$) и двух лучей $x = 1$ и $x = -1$. Отметим, что при рассмотрении уравнения и его графика понятия области определения и области значений не вводятся (в отличие от функции). В старших классах будет продолжено изучение графиков уравнений, а также будут рассмотрены графики неравенств.

III. Задания на уроке и на дом

Постройте на координатной плоскости множество точек $(x; y)$, для которых выполняется равенство:

1) $x = 3$;
2) $x = -2$;
3) $(2x - 5)(x + 1) = 0$;
4) $(3x - 2)(x + 2) = 0$;
5) $(y + 2x)(y + 1) = 0$;
6) $(y + x - 1)(y - 2) = 0$;
7) $(y - x + 2)(x + y - 1) = 0$;
8) $(y + 3x - 1)(x + 2y + 3) = 0$;
9) $|x - 3| = 1$;
10) $|x + 2| = 3$;
11) $|y - 1| = x$;
12) $|y - 2| = 2x$;
13) $|x - y + 2| = 1$;
14) $|2x + y - 4| = 3$;

15) $|x - 2y| = |5x + y|$;
16) $|3x - y| = |2x - y|$;
17) $|x| + |y| = 2$;
18) $|x| + 2 \cdot |y| = 3$;
19) $3 \cdot |x| + |y| = 4$;
20) $|x - 1| + |y| = 2$;
21) $|x| + |y - 1| = 2$;
22) $|x| - |y| = 2$;
23) $|x| + |y| = x + y$;
24) $|x| + |y| = x - y$;
25) $|x - 1| + |x - 3| = 2$;
26) $|x - 3| + |x - 7| = 4$;
27) $2 \cdot |y - 3| = 1$;
28) $2 \cdot |3 - 2y| = 5$;
29) $|y + 1| + |y - 2| = 3$;
30) $|y + 2| + |y - 1| = 3$.

IV. Подведение итогов урока

Факультативные уроки. Зачет по теме «Функции»

Цели: сравнить успеваемость учащихся при одинаковой сложности заданий; иметь возможность повысить оценки за выполненные контрольные работы.

Тип уроков: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Общая характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи представлены в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается 1 баллом, из блока В – 2 баллами, из блока С – 3 баллами. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Работа рассчитана на два урока.

III. Зачетная работа

Вариант 1

А

1. Дана функция $y = 2x - 3$. Найдите:

а) значение функции при $x = -1$;

б) значение аргумента, при котором значение функции $y = -7$.

2. Определите точки пересечения графика функции $y = -3x + 5$ с осями координат.

3. Принадлежит ли графику функции $y = 3x - |x| + 1$ точка:
а) A (–1; –3); б) B (2; 4)?

4. Постройте график функции $\frac{y}{x} = \frac{-2x-2}{x}$.

5. Постройте график функции $y = kx$ и определите угловой коэффициент k, если график проходит через точку A (–6; –3).

6. Поезд первоначально находится на расстоянии 30 км от города и удаляется от него со скоростью 40 км/ч. Задайте формулой расстояние s от города до поезда в зависимости от времени движения t.

7. График функции параллелен прямой $y = 3x - 7$ и проходит через точку A (2; 1). Задайте формулой эту функцию.

B

8. Определите точки пересечения графика функции $y = \frac{2x-4}{x^2+1}$ с осями координат.

9. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 5x - 3$ и $y = 7x - 19$.

10. Постройте график функции $y = \begin{cases} x - 3, \text{ если } x \le 1, \\ -2x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

11. Постройте график уравнения $|2x - 4| + |y - 3| = 0$.

C

12. Графики функций $y = (2a - 3) \cdot x + a - 7$ и $y = (4a - 1) \cdot x + 5 - 3a$ параллельны. Найдите значение параметра a и формулу каждой функции.

13. Постройте график функции $y = |x| + \frac{|x|}{x}$.

14. Постройте график уравнения $|y - x| + x = 2$.

Вариант 2

A

1. Дана функция $y = 3x - 4$. Найдите:
а) значение функции при $x = -1$;
б) значение аргумента, при котором значение функции $y = -10$.

2. Определите точки пересечения графика функции $y = -2x + 7$ с осями координат.

3. Принадлежит ли графику функции $y = 4x - |x| + 2$ точка:
а) A (–1; –3); б) B (2; 6)?

4. Постройте график функции $\frac{y}{x} = \frac{-3x-1}{x}$.

5. Постройте график функции $y = kx$ и определите угловой коэффициент k, если график проходит через точку A (–3; –6).

6. Поезд первоначально находится на расстоянии 40 км от города и удаляется от него со скоростью 30 км/ч. Задайте формулой расстояние s от города до поезда в зависимости от времени движения t.

7. График функции параллелен прямой $y = 2x - 6$ и проходит через точку A (3; 2). Задайте формулой эту функцию.

B

8. Определите точки пересечения графика функции $y = \frac{3x-6}{x^2+2}$ с осями координат.

9. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 3x - 14$ и $y = 5x - 6$.

10. Постройте график функции $y = \begin{cases} x+1, \text{ если } x \le 1, \\ 2x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

11. Постройте график уравнения $|4 - 2x| + |y - 1| = 0$.

C

12. Графики функций $y = (3a + 2) \cdot x + 2a - 1$ и $y = (a - 2) \cdot x + 3 - 4a$ параллельны. Найдите значение параметра a и формулу каждой функции.

13. Постройте график функции $y = |x| - \frac{|x|}{x}$.

14. Постройте график уравнения $|y + x| - x = 3$.

IV. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

A

1. Дана функция $y = 2x - 3$.

а) Найдем значение функции при $x = -1$. Для этого в формулу функции вместо x подставим число –1 и получим $y = 2 \cdot (-1) - 3 = -2 - 3 = -5$.

б) Найдем значение аргумента, при котором значение функции $y = -7$. Для этого в формулу функции вместо y подставим число –7 и получим линейное уравнение $-7 = 2x - 3$ или $-4 = 2x$, откуда $x = -2$.

(*Ответы:* а) $y = -5$; б) $x = -2$.)

2. Найдем точки пересечения графика функции $y = -3x + 5$ с осями координат. Сначала определим точку пересечения с осью ординат. Так как любая точка на оси ординат имеет нулевую абсциссу, то подставим значение $x = 0$ в формулу функции и получим $y = -3 \cdot 0 + 5 = 5$. Итак, точка пересечения с осью ординат имеет координаты A (0; 5).

Найдем точку пересечения графика с осью абсцисс. Так как любая точка на оси абсцисс имеет нулевую ординату, то подставим значение $y = 0$ в формулу функции и получим линейное уравнение $0 = -3x + 5$ или $3x = 5$, откуда $x = \frac{5}{3}$. Итак, точка пересечения с осью абсцисс имеет координаты $B\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

(*Ответ:* A (0; 5), $B\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.)

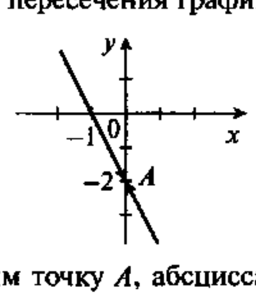
3. Для функции $y = 3x - |x| + 1$ найдем значение функции при значении аргумента, равном абсциссе данной точки.

а) При $x = -1$ получаем $y = 3 \cdot (-1) - |-1| + 1 = -3 - 1 + 1 = -3$. Так как значение функции равно ординате точки A (–1; –3), то точка A принадлежит графику функции.

б) При $x = 2$ получаем $y = 3 \cdot 2 - |2| + 1 = 6 - 2 + 1 = 5$. Так как значение функции не равно ординате точки B (2; 4), то точка B не принадлежит графику функции.

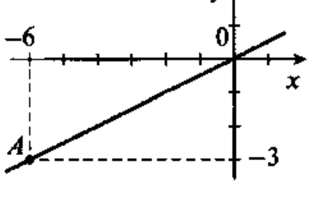
(*Ответ:* точка A принадлежит, B – не принадлежит.)

4. При построении графика функции $\frac{y}{x} = \frac{-2x-2}{x}$ учтем, что $x \neq 0$. Умножим обе части данного равенства на x и получим $y = -2x - 2$. Построим график этой линейной функции, определив, например, точки пересечения графика с осями координат.



Из графика удалим точку A, абсцисса которой равна нулю (эта точка показана стрелками).

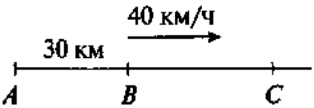
5. На координатной плоскости построим точку A (–6; –3).



Так как функция $y = kx$ – прямая пропорциональная зависимость, то ее график проходит через начало координат. Поэтому через начало координат и точку A проведем прямую – график данной функции. Так как график проходит через точку A, то ее координаты удовлетворяют уравнению функции. Поэтому получаем $-3 = k(-6)$, откуда $k = \frac{1}{2}$.

(*Ответ:* $k = \frac{1}{2}$.)

6. Пусть первоначально поезд находится в точке B на расстоянии 30 км от города (точка A).



Двигаясь со скоростью 40 км/ч, поезд за время t ч преодолеет расстояние $BC = 40t$. Тогда расстояние поезда от города $s = AC = AB + BC = 30 + 40t$ км.

(*Ответ:* $s = 30 + 40t$.)

7. Так как график функции параллелен прямой $y = 3x - 7$, то угловой коэффициент данной функции такой же (т. е. $k = 3$). Поэтому функция имеет вид $y = 3x + b$. Найдем величину b. Так как график функции проходит через точку A (2; 1), то ее координаты удовлетворяют уравнению функции $1 = 3 \cdot 2 + b$ или $1 = 6 + b$, откуда $b = -5$. Итак, искомая функция $y = 3x - 5$.

(*Ответ:* $y = 3x - 5$.)

В

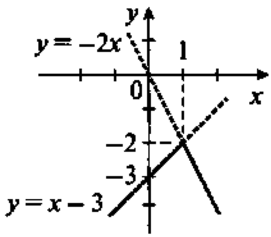
8. Определим точки пересечения графика функции $y = \frac{2x-4}{x^2+1}$ с осями координат. Точка пересечения с осью ординат имеет абсциссу, равную нулю. Поэтому подставим значение $x = 0$ в функцию и получим $y = \frac{2 \cdot 0 - 4}{0^2+1} = \frac{-4}{1} = -4$. Итак, координаты точки пересечения с осью ординат A (0; –4). Точка пересечения с осью абсцисс имеет нулевую ординату. Поэтому подставим значение $y = 0$ в функцию и получим уравнение $0 = \frac{2x-4}{x^2+1}$. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю: $0 = 2x - 4$ (а знаменатель при этом в нуль не обращается), откуда $x = 2$. Итак, координаты точки пересечения с осью абсцисс B (2; 0).

(*Ответ:* A (0; –4), B (2; 0).)

9. Пусть A $(x_0; y_0)$ – точка пересечения графиков функций $y = 5x - 3$ и $y = 7x - 19$. Эта точка принадлежит каждому графику, и ее координаты удовлетворяют каждой функции, т. е. выполняются равенства $y_0 = 5x_0 - 3$ и $y_0 = 7x_0 - 19$. Так как левые части одинаковы, то равны и правые части. Получаем линейное уравнение $5x_0 - 3 = 7x_0 - 19$ или $16 = 2x_0$, откуда абсцисса точки пересечения $x_0 = 8$. Теперь из любого равенства, например из первого, найдем ординату: $y_0 = 5x_0 - 3 = 5 \cdot 8 - 3 = 40 - 3 = 37$. Итак, координаты точки пересечения A (8; 37).

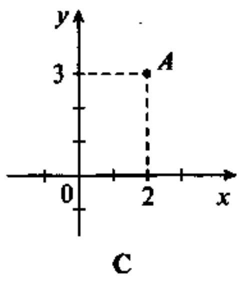
(*Ответ:* A (8; 37).)

10. Построим график данной функции.



Сначала строим график функции $y = x - 3$ и выбираем из него те точки, абсциссы которых $x \le 1$ (сплошная линия). Потом строим график функции $y = -2x$ и выбираем из него те точки, абсциссы которых $x > 1$ (сплошная линия).

11. Так как модуль любого выражения — величина неотрицательная, то уравнение $|2x - 4| + |y - 3| = 0$ выполняется только в том случае, если $|2x - 4| = 0$ и $|y - 3| = 0$. Модуль величины равен нулю, если сама величина равна нулю. Поэтому получаем уравнения $2x - 4 = 0$ (откуда $x = 2$) и $y - 3 = 0$ (тогда $y = 3$). Итак, графиком данного уравнения является единственная точка A (2; 3).



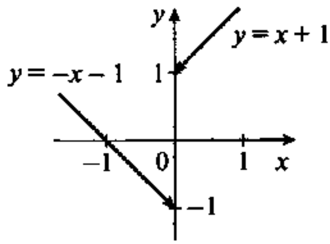
С

12. Графики линейных функций $y = kx + b$ параллельны, если выполнены условия: $k_1 = k_2$ и $b_1 \ne b_2$. Для данных функций $y = (2a - 3) \cdot x + a - 7$ и $y = (4a - 1) \cdot x + 5 - 3a$ получаем условия: $2a - 3 = 4a - 1$ и $a - 7 \ne 5 - 3a$. Решим уравнение $2a - 3 = 4a - 1$. Получаем $-2 = 2a$, откуда $a = -1$. Проверим, что выполняется неравенство $a - 7 \ne -3a$. Подставим значение $a = -1$ в левую и правую части и получим верное неравенство $-1 - 7 \ne 5 - 3 \cdot (-1)$

или $-8 \neq 8$. Теперь подставим $a = -1$ в данные функции и определим их: $y = (2 \cdot (-1) - 3) \cdot x + (-1) - 7$ и $y = (4 \cdot (-1) - 1) \cdot x + 5 - 3 \cdot (-1)$ или $y = -5x - 8$ и $y = -5x + 8$.

(*Ответ:* $a = -1$, $y = -5x - 8$, $y = -5x + 8$.)

13. Построим график функции $y = |x| + \frac{|x|}{x}$. Учтем, что $x \neq 0$, и раскроем знак модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и функция имеет следующий вид: $y = -x + \frac{-x}{x}$ или $y = -x - 1$. Построим график этой функции при $x < 0$.



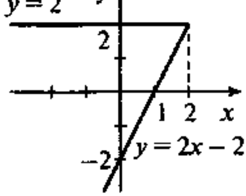
Если $x > 0$, то $|x| = x$ и функция имеет следующий вид: $y = x + \frac{x}{x}$ или $y = x + 1$. Построим график этой функции при $x > 0$. Стрелками показано, что при $x = 0$ функция не определена (не имеет смысла).

14. Для построения графика уравнения $|y - x| + x = 2$ раскроем знак модуля, рассмотрев два случая.

1. Если $y - x < 0$, то $|y - x| = -(y - x) = x - y$ и уравнение имеет вид $x - y + x = 2$, откуда $y = 2x - 2$. Подставим эту величину y в неравенство $y - x < 0$ и получим $2x - 2 - x < 0$ или $x - 2 < 0$. Это неравенство выполняется при $x < 2$. Построим график функции $y = 2x - 2$ при $x < 2$.

2. Если $y - x \geq 0$, то $|y - x| = y - x$ и уравнение имеет вид $y - x + x = 2$, откуда $y = 2$. Подставим эту величину y в неравенство $y - x \geq 0$ и получим $2 - x \geq 0$. Это неравенство выполняется при $x \leq 2$. Построим график функции $y = 2$ при $x \leq 2$.

В результате рассмотрения двух случаев получаем график данного уравнения.



Вариант 2

А

1. Дана функция $y = 3x - 4$.

а) Найдем значение функции при $x = -1$. Для этого в формулу функции вместо x подставим число -1 и получим $y = 3 \cdot (-1) - 4 = -3 - 4 = -7$.

б) Найдем значение аргумента, при котором значение функции $y = -10$. Для этого в формулу функции вместо y подставим число -10 и получим линейное уравнение $-10 = 3x - 4$ или $-6 = 3x$, откуда $x = -2$.

(*Ответы:* а) $y = -7$; б) $x = -2$.)

2. Найдем точки пересечения графика функции $y = -2x + 7$ с осями координат. Так как любая точка на оси ординат имеет нулевую абсциссу, то подставим значение $x = 0$ в формулу функции и получим $y = -2 \cdot 0 + 7 = 7$. Итак, точка пересечения с осью ординат имеет координаты A (0; 7).

Найдем точку пересечения графика с осью абсцисс. Так как любая точка на оси абсцисс имеет нулевую ординату, то подставим значение $y = 0$ в формулу функции и получим линейное уравнение $0 = -2x + 7$ или $2x = 7$, откуда $x = 3{,}5$. Итак, точка пересечения с осью абсцисс имеет координаты B (3,5; 0).

(*Ответ:* A (0; 7), B (3,5; 0).)

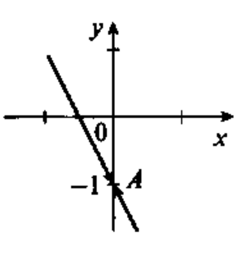
3. Для функции $y = 4x - |x| + 2$ найдем значение функции при значении аргумента, равном абсциссе данной точки.

а) При $x = -1$ получаем $y = 4 \cdot (-1) - |-1| + 2 = -4 - 1 + 2 = -3$. Так как значение функции равно ординате точки A (−1; −3), то точка A принадлежит графику функции.

б) При $x = 2$ получаем $y = 4 \cdot 2 - |2| + 2 = 8 - 2 + 2 = 8$. Так как значение функции не равно ординате точки B (2; 6), то точка B не принадлежит графику функции.

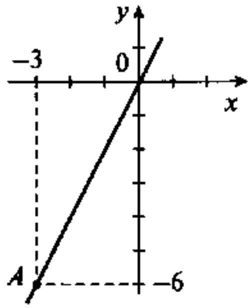
(*Ответ:* точка A принадлежит, B — не принадлежит.)

4. При построении графика функции $\frac{y}{x} = \frac{-3x-1}{x}$ учтем, что $x \neq 0$. Умножим обе части данного равенства на x и получим $y = -3x - 1$. Построим график этой линейной функции, определив, например, точки пересечения графика с осями координат.



Из графика удалим точку A, абсцисса которой равна нулю (эта точка показана стрелками).

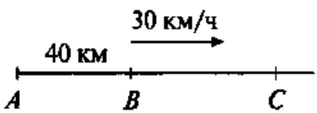
5. На координатной плоскости построим точку A $(-3; -6)$. Так как функция $y = kx$ – прямая пропорциональная зависимость, то ее график проходит через начало координат. Поэтому через начало координат и точку A проведем прямую – график данной функции.



Так как график проходит через точку A, то ее координаты удовлетворяют уравнению функции. Поэтому получаем $-6 = k(-3)$, откуда $k = 2$.

(*Ответ:* $k = 2$.)

6. Пусть первоначально поезд находится в точке B на расстоянии 40 км от города (точка A).



Двигаясь со скоростью 30 км/ч, поезд за время t ч преодолеет расстояние $BC = 30t$. Тогда расстояние поезда от города $s = AC = AB + BC = 40 + 30t$ км.

(*Ответ:* $s = 40 + 30t$.)

7. Так как график функции параллелен прямой $y = 2x - 6$, то угловой коэффициент данной функции такой же (т. е. $k = 2$). Поэтому функция имеет вид $y = 2x + b$. Найдем величину b. Так как график функции проходит через точку A $(3; 2)$, то ее координаты удовлетворяют уравнению функции: $2 = 2 \cdot 3 + b$ или $2 = 6 + b$, откуда $b = -4$. Итак, искомая функция $y = 2x - 4$.

(*Ответ:* $y = 2x - 4$.)

В

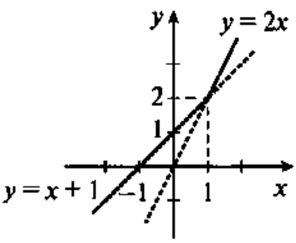
8. Определим точки пересечения графика функции $y = \dfrac{3x-6}{x^2+2}$ с осями координат. Точка пересечения с осью ординат имеет абсциссу, равную нулю. Поэтому подставим значение $x = 0$ в функцию и получим $y = \frac{3 \cdot 0 - 6}{0^2 + 2} = \frac{-6}{2} = -3$. Итак, координаты точки пересечения с осью ординат A (0; –3). Точка пересечения с осью абсцисс имеет нулевую ординату. Поэтому подставим значение $y = 0$ в функцию и получим уравнение $0 = \frac{3x - 6}{x^2 + 2}$. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю: $0 = 3x - 6$ (а знаменатель при этом в нуль не обращается), откуда $x = 2$. Итак, координаты точки пересечения с осью абсцисс B (2; 0).

(*Ответ:* A (0; –3), B (2; 0).)

9. Пусть A (x_0; y_0) – точка пересечения графиков функций $y = 3x - 14$ и $y = 5x - 6$. Эта точка принадлежит каждому графику, и ее координаты удовлетворяют каждой функции, т. е. выполняются равенства $y_0 = 3x_0 - 14$ и $y_0 = 5x_0 - 6$. Так как левые части одинаковы, то равны и правые части. Получаем линейное уравнение $3x_0 - 14 = 5x_0 - 6$ или $-8 = 2x_0$, откуда абсцисса точки пересечения $x_0 = -4$. Теперь из любого равенства, например из первого, найдем ординату: $y_0 = 3x_0 - 14 = 3 \cdot (-4) - 14 = -12 - 14 = -26$. Итак, координаты точки пересечения A (–4; –26).

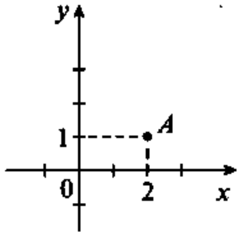
(*Ответ:* A (–4; –26).)

10. Построим график данной функции.



Сначала строим график функции $y = x + 1$ и выбираем из него те точки, абсциссы которых $x \leq 1$ (сплошная линия). Потом строим график функции $y = 2x$ и выбираем из него те точки, абсциссы которых $x > 1$ (сплошная линия).

11. Так как модуль любого выражения – величина неотрицательная, то уравнение $|4 - 2x| + |y - 1| = 0$ выполняется только в том случае, если $|4 - 2x| = 0$ и $|y - 1| = 0$. Модуль величины равен нулю, если сама величина равна нулю. Поэтому получаем уравнения $4 - 2x = 0$ (откуда $x = 2$) и $y - 1 = 0$ (тогда $y = 1$). Итак, графиком данного уравнения является единственная точка A (2; 1).



С

12. Графики линейных функций $y = kx + b$ параллельны, если выполнены условия: $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$. Для данных функций $y = (3a + 2) \cdot x + 2a - 1$ и $y = (a - 2) \cdot x + 3 - 4a$ получаем условия: $3a + 2 = a - 2$ и $2a - 1 \neq 3 - 4a$. Решим уравнение $3a + 2 = a - 2$. Получаем $2a = -4$, откуда $a = -2$. Проверим, что выполняется неравенство $2a - 1 \neq 3 - 4a$. Подставим значение $a = -2$ в левую и правую части и получим верное неравенство $2 \cdot (-2) - 1 \neq 3 - 4 \cdot (-2)$ или $-5 \neq 11$. Теперь подставим $a = -2$ в данные функции и определим их: $y = (3 \cdot (-2) + 2) \cdot x + 2 \cdot (-2) - 1$ и $y = (-2 - 2) \cdot x + 3 - 4 \cdot (-2)$ или $y = -4x - 5$ и $y = -4x + 11$.

(*Ответ:* $a = -2$, $y = -4x - 5$, $y = -4x + 11$.)

13. Построим график функции $y = |x| - \frac{|x|}{x}$. Учтем, что $x \neq 0$, и раскроем знак модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и функция имеет следующий вид: $y = -x + \frac{x}{x}$ или $y = -x + 1$. Построим график этой функции при $x < 0$.

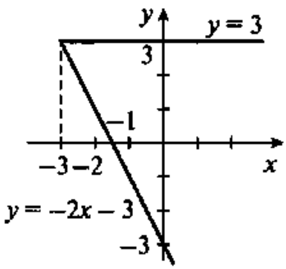
Если $x > 0$, то $|x| = x$ и функция имеет следующий вид: $y = x - \frac{x}{x}$ или $y = x - 1$. Построим график этой функции при $x > 0$. Стрелками показано, что при $x = 0$ функция не определена (не имеет смысла).

14. Для построения графика уравнения $|y + x| - x = 3$ раскроем знак модуля, рассмотрев два случая.

1. Если $y + x < 0$, то $|y + x| = -(y + x) = -y - x$ и уравнение имеет вид $-y - x - x = 3$, откуда $y = -2x - 3$. Подставим эту величину y в неравенство $y + x < 0$ и получим $-2x - 3 + x < 0$ или $-x - 3 < 0$. Это неравенство выполняется при $x > -3$. Построим график функции $y = -2x - 3$ при $x > -3$.

2. Если $y + x \geq 0$, то $|y + x| = y + x$ и уравнение имеет вид $y + x - x = 3$, откуда $y = 3$. Подставим эту величину y в неравенство $y + x \geq 0$ и получим $3 + x \geq 0$. Это неравенство выполняется при $x \geq -3$. Построим график функции $y = 3$ при $x \geq -3$.

В результате рассмотрения двух случаев получаем график данного уравнения.



V. Подведение итогов уроков

Глава III
СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

§ 7. СТЕПЕНЬ И ЕЕ СВОЙСТВА

Урок 34. Определение степени с натуральным показателем

Цель: развить навыки возведения в степень.

Планируемые результаты: освоить понятие степени с натуральным показателем.

Тип урока: урок изучения нового материала.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

*Степенью числа **a** с натуральным показателем **n** называется произведение **n** одинаковых сомножителей **a*** и обозначается символом a^n ($n \geq 2$), т. е. $\underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ раз}} = a^n$. Если степень равна единице (т. е. $n = 1$), то a^1 равняется числу a (т. е. $a^1 = a$). Повторяющийся *множитель **a** называется основанием степени, число повторяющихся множителей **n** – показателем степени.* Степень a^n с основанием a и показателем n читается так: «a в степени n» или «n-я степень числа a». Нахождение значения степени называют возведением в степень.

Пример 1

а) $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$ (3 в шестой степени, или шестая степень числа 3);

б) $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ (0 во второй степени, или 0 в квадрате, или вторая степень числа 0);

в) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$ (–2 в четвертой степени, или четвертая степень числа (–2));

г) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$ ($\left(-\frac{1}{3}\right)$ в третьей степени, или $\left(-\frac{1}{3}\right)$ в кубе, или третья степень числа $\left(-\frac{1}{3}\right)$);

д) $(0,(6))^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. При этом десятичная дробь 0,(6) была обращена в обыкновенную дробь $\frac{2}{3}$.

Аналогично можно использовать определение степени числа и в алгебраических выражениях.

Пример 2

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = 2^3 \cdot a^2 \cdot b^4$;

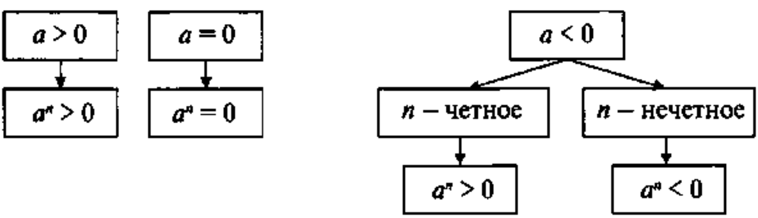
б) $\frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^5}$ (очевидно, что $b \neq 0$);

в) $a^2 \cdot a^3 \cdot a = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$.

В натуральную степень можно возводить любые числа: отрицательные, нуль, положительные. *При возведении* в степень *положительного* числа получается *положительное число. При возведении* в степень *нуля* получается *нуль. При возведении* в степень *отрицательного* числа может получиться как *отрицательное*, так и *положительное число*. При этом если *показатель* степени – *четное число*, то при возведении получается *положительное* число. Если *показатель* степени – *нечетное число*, то при возведении получается *отрицательное* число (см. пример 1).

Действительно, если n – четное число, то произведение четного числа отрицательных множителей положительно. Если n – нечетное число, то произведение нечетного числа отрицательных множителей отрицательно.

Знак степени a^n



Из приведенной схемы следует, что *при четном показателе n* степень числа $a^n \geq 0$ при любом значении a.

Пример 3

При любых значениях переменных a и b выражения a^2, a^6, $(a - b)^2$, $(2a + 3b)^4$ и т. д. принимают только неотрицательные значения.

Понятие степени числа с натуральным показателем позволяет решать более сложные задачи.

Пример 4

Найдем значения выражений:

а) $2 \cdot 3^3 - 2^6 + 4^2 = 2 \cdot 27 - 64 + 16 = 54 - 64 + 16 = 6$ (здесь учтено, что

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ и $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$);

б) $\dfrac{3 \cdot 5^3 - 5 \cdot 2^6}{4 \cdot 3^2 + 2^4 + 3} = \dfrac{3 \cdot 125 - 5 \cdot 64}{4 \cdot 9 + 16 + 3} = \dfrac{375 - 320}{36 + 16 + 3} = \dfrac{55}{55} = 1$ (здесь учтено, что $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, $2^6 = 64$ и $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$).

III. Задания на уроке

№ 374 (а, в, ж, и), 375 (б, г), 376, 381 (а), 385 (а, г, д), 388 (д, з), 392 (а), 395 (б, г), 397.

IV. Контрольные вопросы

– Дайте определение степени с натуральным показателем.
– Дайте определение основания степени.
– Дайте определение показателя степени.
– Какое число получается при возведении положительного числа в степень?
– Какое число получается при возведении нуля в степень?
– Какое число получается при возведении отрицательного числа в степень? От чего зависит результат?

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 374 (б, д, е, з), 375 (а, д), 377, 381 (б), 385 (б, в, е), 388 (е, и), 392 (б), 395 (а, в), 398.

Уроки 35, 36. Умножение и деление степеней

Цель: рассмотреть свойства умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями.

Планируемые результаты: научиться умножать и делить степени с одинаковыми основаниями.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение степени с натуральным показателем.

2. Какое число получается при возведении положительного числа в степень?

3. Выполните возведение в степень:

а) 17^2; б) $(-4)^3$; в) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$.

4. Выполните действие:

а) $(12 - 3)^2$; б) $12^2 - 3^2$.

5. Запишите в виде выражения куб суммы чисел a и b.

Вариант 2

1. Дайте определение степени с натуральным показателем.

2. Какое число получается при возведении отрицательного числа в степень?

3. Выполните возведение в степень:

а) 19^2; б) $(-3)^3$; в) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$.

4. Выполните действие:

а) $(14 - 5)^2$; б) $14^2 - 5^2$.

5. Запишите в виде выражения сумму кубов чисел a и b.

III. Работа по теме уроков

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются, т. е. $a^m a^n = a^{m+n}$.

Используя определение степени с натуральным показателем и свойства умножения, получаем

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(aa\ldots a)}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{(aa\ldots a)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{aa\ldots a}_{m+n \text{ раз}} = a^{m+n}.$$

Доказанное свойство выполняется для любого числа множителей.

Пример 1

а) $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$;

б) $3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 = 3^{3+2+1} = 3^6 = 729$;

в) $x^4 \cdot x^2 \cdot x^5 = x^{4+2+5} = x^{11}$.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются, т. е. $a^m : a^n = a^{m-n}$. Очевидно, что $a \neq 0$ (так как делить на нуль нельзя) и $m > n$ (степень $m - n$ должна также быть натуральным числом).

Очевидно, что равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$ будет доказано, если будет доказано, что произведение a^{m-n} и a^n равно a^m. Используя свойство умножения степеней, получаем $a^{m-n}a^n = a^{(m-n)+n} = a^{m-n+n} = a^m$. Тогда по определению частного имеем $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Пример 2

а) $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$;

б) $3^8 : 3^5 = 3^{8-5} = 3^3 = 27$;

в) $a^7 : a^4 = a^{7-4} = a^3$ $(a \neq 0)$;

г) $y^9 : y^4 = y^{9-4} = y^5$ $(y \neq 0)$.

Свойство деления $a^m : a^n = a^{m-n}$ было доказано для случая $m - n > 0$. Будем считать, что такое же свойство справедливо и при $m = n$. Тогда получаем $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$. Очевидно, что при $a \neq 0$ и любом натуральном m величина $a^m : a^m = 1$. Поэтому разумно считать, что $a^0 = 1$ при $a \neq 0$. Итак, *степень числа a, не равного нулю, с нулевым показателем равна единице*, т. е. $a^0 = 1$ при $a \neq 0$. Заметим, что если основание равно нулю, то степень с нулевым показателем не определена (не имеет смысла), т. е. *0^0 не имеет смысла*.

Пример 3

а) $2{,}7^0 = 1$;

б) $\left(-6\frac{1}{3}\right)^0 = 1$;

в) 0^0 не имеет смысла;

г) $(3x)^0 = 1$ при $x \neq 0$;

д) $(x - y)^0 = 1$ при $x \neq y$;

е) $(2x + 3y)^0 = 1$ при $2x + 3y \neq 0$.

После введения нулевой степени формулу $a^m a^n = a^{m+n}$ можно применять и в случае, когда $m = 0$ и $n = 0$, если $a \neq 0$. Формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$ можно применять, когда m и n не только натуральные числа, но и нули, если $m \geq n$ и $a \neq 0$. В старших классах будет показано, что свойства умножения и деления степеней выполняются при любых показателях степеней. Очевидно, что *свойства умножения и деления* можно применять и *совместно*.

Пример 4

а) $2^3 \cdot 2^6 : 2^5 = 2^{3+6-5} = 2^4 = 16$;

б) $2^5 : (2 \cdot 2^2) = 2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$;

в) $x^4 \cdot x^3 : x^5 = x^{4+3-5} = x^2$;

г) $\frac{y^5 \cdot y^3 \cdot y}{y^4 \cdot y^2} = y^{5+3+1-4-2} = y^3$.

IV. Задания на уроках

№ 403, 405, 408 (в, д), 410 (а, д), 414, 417, 419 (а, в, д), 420 (б, г), 421 (а, б).

V. Контрольные вопросы

– Запишите свойства умножения и деления степеней.

– Сформулируйте словами свойства умножения и деления степеней.
– Чему равна степень с нулевым показателем? Для каких оснований степени?

VI. Творческие задания

1. Определите закономерности и найдите последнюю цифру числа a^n для $a = 1, 2, 3, ..., 10$ и натурального n.

(*Ответ:* результаты приведены в таблице. Сверху указано основание a, слева – степень $n = 1, 2, ..., 8$. В последней строке указана повторяемость последней цифры. Видно, что при возведении $a = 1, 5, 6, 10$ в любую степень последняя цифра не меняется. При возведении $a = 2, 3, 7, 8$ последняя цифра повторяется при изменении показателя степени на 4. При возведении $a = 4, 9$ последняя цифра повторяется при изменении показателя степени на 2.)

n \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
3	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
4	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
6	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
7	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
8	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
		4	4	2			4	4	2	

2. Используя результаты предыдущей задачи (см. таблицу), найдите последнюю цифру числа:

а) 2004^{2004}; в) 5867^{1993}; д) 3648^{1734}.

б) 1936^{537}; г) 2435^{183};

(*Ответы:*

а) 6 (последняя цифра основания 4, показатель степени 2004 кратен 4);

б) 6 (последняя цифра основания 6, число 6 в любой степени оканчивается на 6);

в) 7 (последняя цифра основания 7, показатель 1993 при делении на 4 дает остаток 1, т. е. $1993 = 4 \cdot 498 + 1$);

г) 5 (последняя цифра основания 5, число 5 в любой степени оканчивается на 5);

д) 4 (последняя цифра основания 8, показатель степени 1734 при делении на 4 дает остаток 2, т. е. $1734 = 4 \cdot 433 + 2$).)

3. Найдите последнюю цифру числа:

а) $1536^{937} - 355^{386} + 121^{536}$;

б) $310^{636} + 3 \cdot 531^{196} + 786^{374}$;

в) $734^{1531} + 2 \cdot 631^{324} + 389^{678}$;

г) $1743^{651} - 3 \cdot 135^{163} + 4 \cdot 647^{174}$.

(*Ответы:*

а) 2 (1536^{937} оканчивается на 6, 355^{386} – на 5, 121^{536} – на 1, и полученное число оканчивается на $6 - 5 + 1 = 2$);

б) 9 (310^{636} оканчивается на 0, 531^{196} – на 1, $3 \cdot 531^{196}$ – на 3, 786^{374} – на 6, и полученное число оканчивается на $0 + 3 + 6 = 9$);

в) 7 (734^{1531} оканчивается на 4, 631^{324} – на 1, $2 \cdot 631^{324}$ – на 2, 389^{678} – на 1, и полученное число оканчивается на $4 + 2 + 1 = 7$);

г) 8 (1743^{651} оканчивается на 7, 135^{163} – на 5, $3 \cdot 135^{163}$ – на 5, 647^{174} – на 9, $4 \cdot 647^{174}$ – на 6, и полученное число оканчивается на $7 - 5 + 6 = 8$).)

4. Определите, является ли число простым или составным:

а) $537^{1994} - 3$; в) $736^{354} - 1$; д) $537^{1981} - 389^{196}$;

б) $735^{1937} - 1$; г) $846^{175} - 6$; е) $746^{432} - 371$.

(*Ответ:* все числа составные.)

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 404, 406, 408 (г, е), 410 (б, е), 415, 418, 419 (б, г, е), 420 (а, в), 421 (в, г).

Уроки 37, 38. Возведение в степень произведения и степени

Цель: рассмотреть свойства возведения в степень произведения чисел и степени числа.

Планируемые результаты: научиться вычислять степень произведения и степень числа.

Тип уроков: урок проблемного изложения, продуктивный урок.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Сформулируйте словами и запишите свойство умножения степеней с одинаковыми основаниями.

2. Выполните действия со степенями:

а) $3^5 \cdot 3^{13} : 3^{16}$; б) $a^8 \cdot a^7 : a^{11}$; в) $\frac{a^6 \cdot a^9}{a^{10} \cdot a^4}$.

Вариант 2

1. Сформулируйте словами и запишите свойство деления степеней с одинаковыми основаниями.

2. Выполните действия со степенями:

а) $4^5 \cdot 4^{12} : 4^{13}$; б) $a^7 \cdot a^5 : a^9$; в) $\frac{a^8 \cdot a^9}{a^6 \cdot a^7}$.

III. Работа по теме уроков

При возведении в степень произведения чисел каждое число возводится в эту степень и результаты перемножаются, т. е. $(ab)^n = a^n b^n$ (a и b – любые числа, n – натуральное число).

По определению степени $(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\text{ раз}}$.

Сгруппировав отдельно множители a и b, получаем

$$\underbrace{(ab)(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\text{ раз}} = \underbrace{(aa...a)}_{n\text{ раз}}\cdot\underbrace{(bb...b)}_{n\text{ раз}}.$$

Используя определение степени, запишем:

$$\underbrace{(aa...a)}_{n\text{ раз}}\cdot\underbrace{(bb...b)}_{n\text{ раз}} = a^n \cdot b^n.$$

Следовательно, доказано свойство $(ab)^n = a^n \cdot b^n$. Разумеется, это свойство можно использовать при умножении любого числа множителей.

Пример 1

а) $6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$;

б) $60^2 = (3 \cdot 4 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2$;

в) $(ab)^4 = a^4 \cdot b^4$;

г) $(2 \cdot x \cdot y \cdot z)^3 = 2^3 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z^3 = 8 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z^3$.

При возведении степени числа в степень основание остается тем же, а показатели степени перемножаются, т. е. $(a^m)^n = a^{mn}$ (a – любое число, m и n – натуральные числа). По определению степени $(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m ... a^m}_{n\text{ раз}}$. Согласно основному свойству степени $\underbrace{a^m a^m ... a^m}_{n\text{ раз}} = a^{m+m+...+m} = a^{mn}$.

Итак, доказано свойство $(a^m)^n = a^{mn}$.

Пример 2

а) $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$; б) $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$.

Разумеется, рассмотренные свойства степеней можно использовать *вместе с другими свойствами.*

Пример 3

а) $(2^3 \cdot 3^4)^5 = (2^3)^5 \cdot (3^4)^5 = 2^{3 \cdot 5} \cdot 3^{4 \cdot 5} = 2^{15} \cdot 3^{20}$;

б) $(a^2 \cdot b^3)^4 = (a^2)^4 \cdot (b^3)^4 = a^{2 \cdot 4} \cdot b^{3 \cdot 4} = a^8 \cdot b^{12}$;

в) $\left(\dfrac{a \cdot b^3}{c^2}\right)^2 = \dfrac{(a^1)^2 \cdot (b^3)^2}{(c^2)^2} = \dfrac{a^{1 \cdot 2} \cdot b^{3 \cdot 2}}{c^{2 \cdot 2}} = \dfrac{a^2 \cdot b^6}{c^4}$;

г) $\dfrac{(a^2 \cdot b^3)^4}{(a \cdot b^2)^3} = \dfrac{(a^2)^4 \cdot (b^3)^4}{(a^1)^3 \cdot (b^2)^3} = \dfrac{a^{2 \cdot 4} \cdot b^{3 \cdot 4}}{a^{1 \cdot 3} \cdot b^{2 \cdot 3}} = \dfrac{a^8 \cdot b^{12}}{a^3 \cdot b^6} = a^{8-3} \cdot b^{12-6} =$
$= a^5 \cdot b^6$.

IV. Задания на уроках

№ 428, 430 (а, г), 431 (а), 432, 434, 436 (а, г), 439, 441 (а, г), 443 (в, г), 449 (а, в, е), 450 (в, е).

V. Контрольные вопросы

– Запишите свойства возведения в степень произведения и степени.

– Сформулируйте словами свойства возведения в степень произведения и степени.

VI. Творческие задания

1. Какое из данных чисел больше?

а) $(324^4)^{25}$ и $(324^{10})^{10}$;
б) $(15^6)^8$ и $(15^{10})^4$;
в) $(613^7)^4$ и $(613^5)^6$;
г) 512^4 и $(-512)^4$;
д) $(-316)^7$ и $(-316)^8$;
е) $(-316^2)^3$ и $(-316)^6$.

2. Сравните данные числа.

а) $(2^3)^4$ и $(3^2)^6$;
б) $(3^3)^{15}$ и $(2^5)^9$;
в) $(3^3)^6$ и $(2^5)^6$;
г) $(2^4)^{17}$ и $(4^2)^{17}$;
д) $(3^4)^{183}$ и $(4^3)^{183}$.

3. Найдите последнюю цифру числа.

а) $(193^3)^7$; б) $(397^6)^5$; в) $(124^5)^4$; г) $(512^5)^7$.

4. Упростите выражение.

а) $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{16}$;

б) $2^{14} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + ... + 2^{34}$.

(*Ответы:*

а) 2^{17} (заметьте: $2 + 2 = 2^2$, $2^2 + 2^2 = 2^3$ и т. д. до последнего слагаемого);

б) 2^{35} (заметьте: $2^{14} + 2^{14} = 2 \cdot 2^{14} = 2^{15}$, $2^{15} + 2^{15} = 2^{16}$ и т. д. до последнего слагаемого).)

5. Вычислите.

а) $(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot ... \cdot (-1)^{50}$; б) $(-1)^1 + (-1)^2 + ... + (-1)^{50}$.

(*Ответы:* а) –1; б) 0 (заметьте: 25 степеней с нечетными показателями степени и 25 степеней с четными показателями степени).)

6. Решите уравнение.

а) $2^x = 64$;
б) $3^{x-5} = 81$;
в) $2^3 \cdot 2^{x-7} = 16$;
г) $3^{2x-1} \cdot 3^{x+1} = 27$;
д) $(3^{x-1})^2 = 81$;
е) $(2^3)^{x-1} = 512$.

(*Ответы*: а) $x = 6$; б) $x = 9$; в) $x = 8$; г) $x = 1$; д) $x = 3$; е) $x = 4$.)

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 429, 430 (б, в), 431 (б), 433, 436 (б, е), 438, 441 (в, д), 443 (а, б), 449 (б, г, д), 450 (б, д).

§ 8. ОДНОЧЛЕНЫ

Урок 39. Одночлен и его стандартный вид

Цели: ознакомить с понятием одночлена, его стандартным видом; научить определять степень одночлена, вычислять значение одночлена.

Планируемые результаты: научиться записывать одночлен в стандартном виде.

Тип урока: урок изучения нового материала.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Выполните действия со степенями:

а) $(3a^2b)^3$;
б) $(aa^3b^2b)^5$;
в) $(x^{m+2} \cdot x^{3m-2})^2$;
г) $\dfrac{(a^3)^2 \cdot (a^4)^3 \cdot a^2}{(a^2)^4 \cdot a^5 \cdot a^4}$.

Вариант 2

Выполните действия со степенями:

а) $(4a^3b^2)^2$;
б) $(a^2a^3b^3b)^4$;
в) $(x^{2m-3} \cdot x^{m+3})^3$;
г) $\dfrac{(a^2)^3 \cdot (a^3)^2 \cdot a^4}{(a^2)^4 \cdot a^3 \cdot a^2}$.

III. Работа по теме урока

Алгебраическое *выражение*, состоящее *из произведения числовых и буквенных множителей* или их степеней, называется *одночленом*.

Пример 1

а) Выражения $-3a^2b^3c^5$ и $-7ab(-0{,}5a^2c^3)ab^5$ являются одночленами, так как состоят только из произведений числовых и буквенных множителей и их степеней.

б) Выражение $\frac{a}{3} \cdot b^2c^4$ также является одночленом, так как может быть записано в виде $\frac{1}{3} \cdot ab^2c^4$ и тоже состоит только из произведения числового множителя $\frac{1}{3}$ и буквенных множителей в соответствующих степенях: a, b^2, c^4.

в) Выражение $a^3 - b^2$ не является одночленом, так как содержит операцию вычитания.

г) Выражение $a^3 : b - ab^2$ также не является одночленом, так как содержит операции деления выражений и вычитания.

Заметим, что *числа, переменные и их степени* считаются *одночленами*.

Пример 2

Выражения $7{,}3$, $(-5{,}1)^2$, x, y^4 – одночлены.

Стандартным видом одночлена называется такая его форма, при которой *первым сомножителем* является *числовой множитель*, а *буквенные множители* расположены *в алфавитном порядке* и имеют соответствующие показатели степени. При этом *числовой множитель* называется *коэффициентом* одночлена.

Пример 3

а) Коэффициент одночлена $3a^2b^3$ равен 3;

б) коэффициент одночлена $-6{,}8xy^2z^4$ равен $-6{,}8$;

в) коэффициент одночлена a^3b^2 равен 1;

г) коэффициент одночлена $-a^2bc$ равен -1.

Пример 4

Стандартный вид одночлена $A = -3a^2b \cdot (4 \cdot a^3b^2c) \cdot (-0{,}125 \cdot abc^3)$ есть одночлен $1{,}5 \cdot a^6b^4c^4$, так как, выполнив умножение в данном одночлене, получим $A = (-3 \cdot 4 \cdot (-0{,}125)) \cdot (a^2 \cdot a^3 \cdot a) \cdot (b \cdot b^2 \cdot b) \times$ $\times (c \cdot c^3) = 1{,}5 \cdot a^6 \cdot b^4 \cdot c^4$.

При этом множитель 1,5 называют коэффициентом одночлена. Заметим, что любая другая форма одночлена не является его стандартным видом. Например:

а) $A = 1{,}5 \cdot b^4 \cdot a^6 \cdot c^4$, так как множители a, b, c расположены не в алфавитном порядке;

б) $A = a^6 \cdot b^4 \cdot c^4 \cdot 1{,}5$, так как числовой множитель 1,5 находится не на первом месте;

в) $A = 1{,}5 \cdot a^2 \cdot a^4 \cdot b^4 \cdot c^4$, так как не перемножены выражения a^2 и a^4.

Можно провести некоторую аналогию между стандартным видом одночлена и разложением числа на простые множители: в обоих случаях *каждый множитель* должен располагаться *строго на своем месте*.

Степенью одночлена называется *сумма показателей степеней* всех входящих в него *переменных*. Если одночлен не содержит переменных (т. е. является числом), то его степень считают равной нулю. Число 0 является одночленом, степень которого не определена.

Пример 5

а) Степень одночленов $3{,}1$; $-\frac{8}{3}$; 4 равна нулю;

б) степень одночленов $3ab^2c^3$; $-2x^6$; $\frac{6}{7}(x \cdot y \cdot z)^2 = \frac{6}{7} \cdot x^2y^2z^2$ равна 6;

в) степень одночленов $2{,}4a^8$; $-3{,}7a^5b^3$; $-6{,}4a^2b^3cd^2$ равна 8.

IV. Задания на уроке

№ 455 (а–д), 457 (а, в, д), 458 (б, г, е), 459, 461, 463 (а–в).

V. Контрольные вопросы

– Какое выражение называется одночленом? Приведите примеры.
– Какая форма называется стандартным видом одночлена? Приведите примеры.
– Что называется коэффициентом одночлена?
– Как определить степень одночлена?

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 455 (е–и), 457 (б, г, е), 458 (а, в, д), 460, 462, 463 (г–е).

Уроки 40, 41. Умножение одночленов. Возведение одночлена в степень

Цель: развить навыки умножения и возведения одночленов в степень.

Планируемые результаты: отработать навыки умножения и возведения одночленов в степень.

Тип уроков: урок-лекция, урок-исследование.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Какое выражение называется одночленом? Как определить степень одночлена?

2. Приведите одночлен $9a^3b(-2{,}5a^2b^4)b^2$ к стандартному виду.

3. Определите степень одночлена $-6a^3b^2$ и найдите его значение при $a = 2$ и $b = 3$.

Вариант 2

1. Какая форма называется стандартным видом одночлена? Что называется коэффициентом одночлена?

2. Приведите одночлен $7a^3b^2(-1{,}5a^3b^3)a^3$ к стандартному виду.

3. Определите степень одночлена $-8a^2b^3$ и найдите его значение при $a = 3$ и $b = 2$.

III. Работа по теме уроков

При умножении одночленов и *возведении* одночлена *в степень* используются *свойства степеней*. При этом *получается одночлен*, который обычно записывают *в стандартном виде*.

Пример 1

Перемножим одночлены $A = 2{,}3ab^2c$ и $B = -0{,}2a^3bc^4$.

Найдем произведение одночленов A и B. Перемножим числовые множители и степени с одинаковыми основаниями. Получаем $A \cdot B = 2{,}3ab^2c \cdot (-0{,}2a^3bc^4) = 2{,}3 \cdot (-0{,}2) \cdot (a \cdot a^3) \cdot (b^2 \cdot b) \times$ $\times (c \cdot c^4) = -0{,}46a^4b^3c^5$.

Пример 2

Перемножим одночлены $A = 0{,}3a^2b$, $B = 2abc^2$ и $C = 3ab^2c^4$.

Найдем произведение одночленов A, B и C. Используя свойства степеней, получаем $A \cdot B \cdot C = (0{,}3a^2b) \cdot (2abc^2) \cdot (3ab^2c^4) =$ $= (0{,}3 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (a^2 \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b^2) \cdot (c^2 \cdot c^4) = 1{,}8a^4b^4c^6$.

Пример 3

Возведем в пятую степень одночлен $A = 2ab^2c^3$. Получаем $A^5 = (2ab^2c^3)^5 = 2^5 \cdot a^5 \cdot (b^2)^5 \cdot (c^3)^5 = 32a^5b^{10}c^{15}$.

С помощью записи одночлена в стандартном виде, как правило, легко вычислить его значение, если известны значения букв, входящих в него. При этом используется умножение одночленов и возведение одночленов в степень.

Пример 4

Вычислим значение одночлена $A = 2a^2bc \cdot (bc)^2 \cdot a$, если $a = 3$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 2$. Если сразу подставлять значения переменных a, b, c в одночлен A, то получим достаточно громоздкое выражение $A = 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^2 \cdot 3$. Поэтому сначала запишем одночлен A в стандартном виде: $A = 2 \cdot (a^2 \cdot a) \cdot (b \cdot b^2) \cdot (c \cdot c^2) = 2a^3b^3c^3 = 2(abc)^3$. Теперь можно подставить значения a, b, c: $A = 2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\right)^3 = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$.

В ряде случаев, не приведя одночлен к стандартному виду, найти его значение невозможно, так как известны лишь определенные комбинации переменных, но не сами переменные.

Пример 5

Вычислим значение одночлена $A = 0{,}5a^2b^3c^2(ac)^2 \cdot c$, если $a \cdot b \cdot c = 1$, $a \cdot c^2 = 2$. В отличие от предыдущего примера здесь даже непонятно, что можно подставить. Поэтому приведем одночлен к стандартному виду: $A = 0{,}5 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot c = 0{,}5(a^2 \cdot a^2) \cdot b^3 \cdot (c^2 \cdot c^2 \cdot c) = 0{,}5 \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot c^5$.

Теперь в этом многочлене выделим те комбинации переменных, которые известны: $A = 0{,}5 \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot c^5 = 0{,}5 \cdot a^3 \cdot b^3 \times c^3(a \cdot c^2) = 0{,}5(a \cdot b \cdot c)^3 \cdot (a \cdot c^2)$. После этого можно подставить значения $a \cdot b \cdot c = 1$ и $a \cdot c^2 = 2$: $A = 0{,}5 \cdot 1^3 \cdot 2 = 1$.

IV. Задания на уроках

№ 467 (а, в, д), 468, 471, 473, 474 (в, г), 476, 477 (а), 480 (д–з).

V. Контрольные вопросы

– Как умножить одночлены?

– Как возвести одночлен в натуральную степень?

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 467 (б, г, е), 469, 470, 472, 474 (а, б), 475, 477 (б), 480 (а–г).

Уроки 42, 43. Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики

Цель: рассмотреть свойства функций $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики.

Планируемые результаты: научиться строить графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$.

Тип уроков: урок изучения нового материала.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Перемножьте одночлены $3x^2y$, $-0,5x^3y^2$ и $2xy^4$.

2. Возведите одночлен $2a^3b^2c$ в квадрат и в куб.

3. Представьте выражение $(-3a^3b)^2 \cdot 2a^2b^3 \cdot (-0,5ab^2)$ в виде одночлена стандартного вида и определите его степень.

Вариант 2

1. Перемножьте одночлены $2xy^2$, $3x^4y^3$ и $-0,5x^2y^3$.

2. Возведите одночлен $3ab^3c^2$ в квадрат и в куб.

3. Представьте выражение $(-2a^3b^2)^3 \cdot 3a^3b^4 \cdot (-0,5a^2b)$ в виде одночлена стандартного вида и определите его степень.

III. Работа по теме уроков

Зависимость площади квадрата S от его стороны a ($S = a^2$), зависимость кинетической энергии E тела массой m от его скорости v $\left(E = \frac{m \cdot v^2}{2}\right)$, зависимость потенциальной энергии E пружины от длины l, на которую она растянута, $\left(E = \frac{k \cdot l^2}{2}\right)$, где k – коэффициент упругости пружины, и т. д. являются примерами функции $y = x^2$. Рассмотрим таблицу значений такой функции и на основании ее данных построим график функции.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

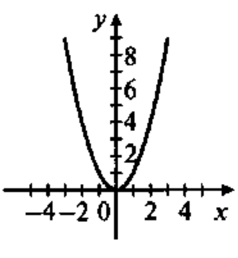


График функции $y = x^2$ называется *параболой.* Рассмотрим *свойства* такой функции.

1. *Область определения* функции – *все значения* x. Действительно, любое число x можно возвести во вторую степень (в квадрат).

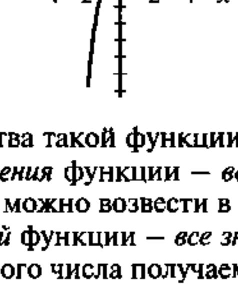
2. *Область значений* функции – *все значения* $y \geq 0$. При возведении в квадрат любого числах $x \neq 0$ получаем положительное число. При возведении в квадрат нуля получаем нуль. Поэтому значения $y \geq 0$ и график функции расположены *не ниже оси абсцисс*.

3. *График* функции проходит *через начало координат*.

4. *Противоположным значениям* x соответствует одно и то же *значение* y, так как $(-x)^2 = x^2$ при любом x. Поэтому график функции *симметричен относительно оси ординат*. Заметим, что такие функции называются *четными*.

Рассмотрим *кубическую зависимость* $y = x^3$. Зависимость объема V куба от его стороны a ($V = a^3$), зависимость объема V шара от его радиуса $R \left(V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3\right)$, где $\pi = 3{,}14$, и т. д. являются именно такими зависимостями. Составим таблицу значений функции $y = x^3$ и на основании ее данных построим график.

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	–8	–3,38	–1	–0,13	0	0,13	1	3,38	8



Рассмотрим свойства такой функции.

1. *Область определения* функции – *все значения* x. Действительно, любое число x можно возвести в третью степень (в куб).

2. *Область значений* функции – *все значения* y. При возведении в куб отрицательного числа получаем отрицательное число, при возведении нуля – нуль, при возведении положительного числа – положительное число.

3. *График* функции проходит *через начало координат*.

4. *Противоположным значениям* x соответствуют *противоположные значения* y, так как $(-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3$ при любом x.

Поэтому график функции *симметричен относительно начала координат.*

Заметим, что такие функции называются *нечетными*.

IV. Задания на уроках

№ 484, 487, 488, 492 (а), 493, 494 (б), 496 (а).

V. Контрольные вопросы

– Нарисуйте эскиз графика функции $y = x^2$.
– Перечислите свойства функции $y = x^2$.
– Нарисуйте эскиз графика функции $y = x^3$.
– Перечислите свойства функции $y = x^3$.
– Дайте определение четной и нечетной функций.

VI. Творческие задания

1. Пользуясь графиком соответствуюших функций, сравните числа:

а) $1{,}1^2$ и $2{,}3^2$;
б) $(-2{,}1)^2$ и $2{,}1^2$;
в) $(-3{,}2)^2$ и $1{,}4^2$;
г) $(-2{,}1)^3$ и $(-1{,}2)^3$;
д) $(-1{,}8)^3$ и $1{,}8^3$;
е) $1{,}3^3$ и $1{,}7^3$.

2. Среди приведенных укажите четные и нечетные функции:

а) $y = -x^2$;
б) $y = x^3$;
в) $y = |x|$;
г) $y = x \cdot |x|$;
д) $y = x^2 \cdot |x|$;
е) $y = x^4$;
ж) $y = x^5$;
з) $y = x$;
и) $y = 2x + 1$;
к) $y = -3x + 4$;
л) $y = -7x$.

(*Ответ:* четные функции – а, в, д, е, нечетные функции – б, г, ж, з, л.)

3. Постройте график функции:

а) $y = -x^2$;
б) $y = -x^3$;
в) $y = x^2 - 1$;
г) $y = x^2 + 2$;
д) $y = (x - 1)^2$;
е) $y = (x + 1)^2$;
ж) $y = x \cdot |x|$;
з) $y = |x|^2$;
и) $y = \dfrac{x^2}{|x|}$;
к) $y = \dfrac{x^3}{|x|}$;
л) $y = x^2 + \dfrac{|x|}{x}$;
м) $y = x^3 - \dfrac{|x|}{x}$.

Укажите четные и нечетные функции.

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 485, 489, 490, 492 (б), 494 (а), 496 (б).

Урок 44. Контрольная работа № 4 по теме «Степень с натуральным показателем»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко, поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при выполнении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает учащимся некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 к набранным баллам добавляются дополнительно 0,5 балла, за решение задач вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (т. е. оценка «5» выставляется уже за четыре задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Возможно, несколько труднее для учеников задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен ученикам (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий). При наличии такой техники в классе на стенде (после контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов.

Контрольная работа рассчитана на один урок.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Дана функция $y = x^2 + 2$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-2 \le x \le 2$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Выполните действия:

а) $a^3 \cdot a^6$; б) $a^{10} : a^8$; в) $(a^2)^4$; г) $(a^2 \cdot b)^3$.

3. Запишите в виде одночлена стандартного вида выражение:

а) $3 \cdot x^3y \cdot z^2 \cdot (-2 \cdot z \cdot y^2 \cdot x)$;

б) $(4 \cdot a^5 \cdot b^3 \cdot c^2)^2 : (-8 \cdot a^7 \cdot c^3 \cdot b^4)$.

4. Сравните числа 8^{16} и $2^{16} \cdot 4^{15}$.

5. Решите уравнение:

а) $\frac{x^{27}}{x^{28}} \cdot \frac{x^{34}}{x^{32}} = 17$; б) $\frac{2^x \cdot 16}{2^5} = 8$.

6. Докажите, что число $10^{50} - 4$ делится на 3.

Вариант 2

1. Дана функция $y = 1 - x^2$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-2 \le x \le 2$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Выполните действия:

а) $a^4 \cdot a^5$; б) $a^9 : a^6$; в) $(a^4)^2$; г) $(a^3 \cdot b^2)^2$.

3. Запишите в виде одночлена стандартного вида выражение:

а) $5 \cdot x^2 \cdot y \cdot z^2 \cdot (-3 \cdot y \cdot x \cdot z^2)$;

б) $-8 \cdot a^7 \cdot b^5 \cdot c^4 : (-2 \cdot a^3 \cdot c \cdot b^2)^2$.

4. Сравните числа 10^{14} и $2^{15} \cdot 5^{14}$.

5. Решите уравнение:

а) $\frac{x^{35}}{x^{42}} \cdot \frac{x^{29}}{x^{21}} = 23$; б) $\frac{2^x \cdot 32}{2^3} = 64$.

6. Докажите, что число $10^{40} - 7$ делится на 3.

Вариант 3

1. Дана функция $y = x^2 - 2x$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-1 \le x \le 3$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Выполните действия:

а) $3a^2 \cdot 5a^3 \cdot 2a^4$; в) $(a^5)^3 \cdot (a^2)^4$;

б) $a^{18} : a^6$; г) $\frac{a^2b \cdot (ab^2)^2}{a^3b^4}$.

3. Запишите в виде одночлена стандартного вида выражение:

а) $5 \cdot (xy^2z^3)^2 \cdot (-2x^2zy^3)^3$;

б) $(2a^3b^2c^3)^3 : (-3ac^2b)^2$.

4. Сравните числа 2^{30} и 3^{20}.

5. Решите уравнение:

а) $\frac{(x^8)^3 \cdot (x^2)^5}{(x^4)^5 \cdot x^{13}} = 19$; б) $\frac{(2^x)^2 \cdot 2^7}{2^5} = 16^2$.

6. Докажите, что число $196^{374} + 391^{164} - 2$ делится на 5.

Вариант 4

1. Дана функция $y = x^2 + 2x$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-3 \le x \le 1$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Выполните действия:

а) $2a^3 \cdot 3a^2 \cdot 4a^5$; в) $(a^3)^4 \cdot (a^3)^2$;

б) $a^{15} : a^5$; г) $\frac{a^3b^2 \cdot (a^2b)^3}{a^5b^3}$.

3. Запишите в виде одночлена стандартного вида выражение:
а) $3 \cdot (yx^2z)^3 \cdot (-3x^2z^2y)^2$; б) $(3a^2b^3c^2)^3 : (-2a^2cb^4)^2$.

4. Сравните числа 3^{40} и 4^{30}.

5. Решите уравнение:

а) $\dfrac{(x^7)^2 \cdot (x^3)^4}{(x^4)^5 \cdot x^5} = 21$; б) $\dfrac{(3^x)^3 \cdot 3^5}{3^2} = 27^2$.

6. Докажите, что число $171^{536} + 375^{164} + 4$ делится на 5.

Вариант 5

1. Дана функция $y = x^2 + 2|x|$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-3 \le x \le 3$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Запишите в виде одночлена стандартного вида выражение:

а) $(a \cdot (a^2)^2 \cdot (a^3)^3)^2$; б) $\dfrac{(2x^2y^2z^3)^3 \cdot (-3yz^4)^2}{yx^2z^5 \cdot (-5y^2xz)^2}$.

3. Сравните числа 7^{80} и 4^{120}.

4. Определите последнюю цифру числа $(389)^{162} + (635)^{236}$.

5. Решите уравнение $(2^x)^2 \cdot 2^{x+5} = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^9 \cdot 32$.

6. Докажите, что число $10^{316} + 6$ не делится на число $10^{19} - 1$.

Вариант 6

1. Дана функция $y = 2|x| - x^2$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-3 \le x \le 3$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Запишите в виде одночлена стандартного вида выражение:

а) $(a \cdot (a^3)^2 \cdot (a^2)^3)^2$; б) $\dfrac{(3x^2yz^2)^4 \cdot (-2y^2z^3)^2}{y^3x^2z^3 \cdot (-5y^2x^3z^4)^2}$.

3. Сравните числа 9^{60} и 4^{90}.

4. Определите последнюю цифру числа $(289)^{364} + (536)^{171}$.

5. Решите уравнение $(3^x)^3 \cdot 3^{4+x} = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^{11} \cdot 9$.

6. Докажите, что число $10^{273} + 7$ не делится на число $10^{19} - 1$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

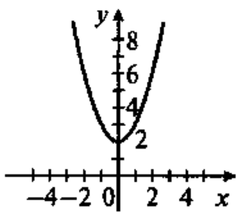
2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности.

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1.



2. а) a^9; б) a^2; в) a^8; г) $a^6 \cdot b^3$.

3. а) $-6x^4y^3z^3$; б) $-2a^3b^2c$.

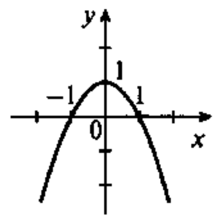
4. $8^{16} > 2^{16} \cdot 4^{15}$.

5. а) $x = 17$; б) $x = 4$.

6. Доказано.

Вариант 2

1.



2. а) a^9; б) a^3; в) a^8; г) $a^6 \cdot b^4$.

3. а) $-15x^3y^2z^4$; б) $-2abc^2$.

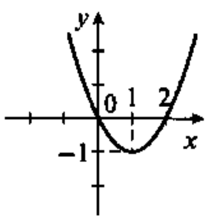
4. $10^{14} < 2^{15} \cdot 5^{14}$.

5. а) $x = 23$; б) $x = 4$.

6. Доказано.

Вариант 3

1.



2. а) $30a^9$; б) a^{12}; в) a^{23}; г) $a \cdot b$.

3. а) $-40x^8y^{13}z^9$; б) $\frac{8}{9}a^7b^4c^5$.

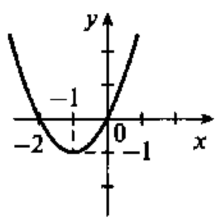
4. $2^{30} < 3^{20}$.

5. а) $x = 19$; б) $x = 3$.

6. Доказано.

Вариант 4

1.



2. а) $24a^{10}$; б) a^{10}; в) a^{18}; г) $a^4 \cdot b^2$.

3. а) $27x^{10}y^5z^7$; б) $\frac{27}{4}a^2bc^4$.

4. $3^{40} > 4^{30}$.

5. а) $x = 21$; б) $x = 1$.

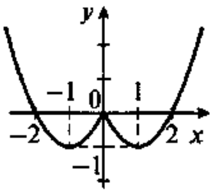
6. Доказано.

Вариант 5

1. Для функции $y = x^2 - 2|x|$ составим таблицу значений функции в промежутке $-3 \le x \le 3$ с шагом 0,5.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	3	1,25	0	–0,75	–1	–0,75	0	–0,75	–1	–0,75	0	1,25	3

Отметим точки из таблицы на координатной плоскости и построим график данной функции. Легко проверить, что функция является четной и ее график симметричен относительно оси ординат.



2. Используя правила действий со степенями, запишем одночлен в стандартном виде:

а) $(a \cdot (a^2)^2 \cdot (a^3)^3)^2 = (a \cdot a^4 \cdot a^9)^2 = (a^{14})^2 = a^{28}$;

б) $\dfrac{(2x^2y^2z^3)^3 \cdot (-3yz^4)^2}{yx^2z^5 \cdot (-5y^2xz)^2} = \dfrac{8x^6y^6z^9 \cdot 9y^2z^8}{x^2yz^5 \cdot 25x^2y^4z^2} =$

$= \dfrac{(8 \cdot 9)x^6 \cdot (y^6 \cdot y^2) \cdot (z^9 \cdot z^8)}{25(x^2 \cdot x^2) \cdot (y \cdot y^4) \cdot (z^5 \cdot z^2)} = \dfrac{72x^6y^8z^{17}}{25x^4y^5z^7} = \dfrac{72}{25}x^2y^3z^{10}$.

(*Ответы:* а) a^{28}; б) $\dfrac{72}{25}x^2y^3z^{10}$.)

3. Запишем данные числа 7^{80} и 4^{120} в другом виде: $7^{80} = (7^2)^{40} = 49^{40}$ и $4^{120} = (4^3)^{40} = 64^{40}$. Так как $49 < 64$, то и $49^{40} < 64^{40}$, или $7^{80} < 4^{120}$.

(*Ответ:* $7^{80} < 4^{120}$.)

4. Запишем данное число в следующем виде: $(389)^{162} + (635)^{236} = (389^2)^{81} + (635)^{236}$. Число 389 оканчивается цифрой 9. При возведении в квадрат число 389^2 оканчивается цифрой 1. Если число оканчивается цифрой 1 или 5, то при возведении такого числа в любую степень оно также будет оканчиваться цифрой 1 или 5. Поэтому данное число оканчивается цифрой $1 + 5 = 6$.

(*Ответ:* 6.)

5. Используя свойства степеней, преобразуем данное уравнение:

$(2^x)^2 \cdot 2^{x+5} = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^9 \cdot 32$ или $2^{2x} \cdot 2^{x+5} = 2^{1+2+\ldots+9} \cdot 2^5$.

Найдем сумму чисел $1 + 2 + \ldots + 9 = (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5 = 4 \cdot 10 + 5 = 45$. Тогда уравнение имеет вид $2^{2x+x+5} = 2^{45} \cdot 2^5$ или $2^{3x+5} = 2^{50}$.

Так как равны степени с одинаковым основанием 2, то равны и показатели степеней: $3x + 5 = 50$ или $3x = 45$, откуда $x = 15$.

(*Ответ:* $x = 15$.)

6. Рассмотрим число $10^{316} + 6$. Число 10^{316} состоит из одной единицы и 316 нулей. Тогда число $10^{316} + 6$ имеет вид 100...06. Сумма цифр этого числа равна 7, и по признаку делимости оно не делится на 9. Число 10^{19} состоит из одной единицы и 19 нулей. Поэтому число $10^{19} - 1$ состоит из 19 девяток (т. е. 99...9) и делится на 9. Так как первое число $10^{316} + 6$ не имеет делителя 9, то оно не может без остатка делиться на второе число $10^{19} - 1$.

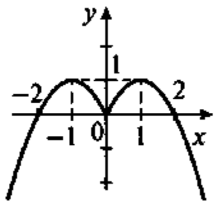
(*Ответ:* доказано.)

Вариант 6

1. Для функции $2|x| - x^2$ составим таблицу значений функции в промежутке $-3 \le x \le 3$ с шагом 0,5.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	–3	1,25	0	0,75	1	0,75	0	0,75	1	0,75	0	–1,25	–3

Отметим эти точки на координатной плоскости и построим график данной функции. Эта функция является четной, и ее график симметричен относительно оси ординат.



2. Используя правила действий со степенями, запишем одночлен в стандартном виде:

а) $(a \cdot (a^3)^2 \cdot (a^2)^3)^2 = (a \cdot a^6 \cdot a^6)^2 = (a^{1+6+6})^2 = (a^{13})^2 = a^{26}$;

б) $$\frac{(3x^2yz^2)^4 \cdot (-2y^2z^3)^2}{y^3x^2z^3 \cdot (-5y^2x^3z^4)^2} = \frac{(81x^8y^4z^8) \cdot 4y^4z^6}{y^3x^2z^3 \cdot (25y^4x^6z^8)} =$$

$$= \frac{(81 \cdot 4) \cdot x^8 \cdot (y^4 \cdot y^4) \cdot (z^8 \cdot z^6)}{25(x^2 \cdot x^6) \cdot (y^3 \cdot y^4) \cdot (z^3 \cdot z^8)} = \frac{324x^8y^8z^{14}}{25x^8y^7z^{11}} = \frac{324}{25}yz^3.$$

(*Ответы:* а) a^{26}; б) $\frac{324}{25}yz^3$.)

3. Запишем данные числа 9^{60} и 4^{90} в другом виде: $9^{60} = (9^2)^{30} = 81^{30}$ и $4^{90} = (4^3)^{30} = 64^{30}$. Так как $81 > 64$, то и $81^{30} > 64^{30}$, или $9^{60} > 4^{90}$.

(*Ответ:* $9^{60} > 4^{90}$.)

4. Запишем данное число в следующем виде: $(289)^{364} + (536)^{171} = (289^2)^{182} + (536)^{171}$. Число 289 оканчивается цифрой 9. При возведении в квадрат число 289^2 оканчивается цифрой 1.

При возведении такого числа в любую степень оно будет также оканчиваться цифрой 1. Число 536 оканчивается цифрой 6. При возведении такого числа в любую степень оно будет также оканчиваться цифрой 6. Поэтому данное число оканчивается цифрой $1 + 6 = 7$.

(*Ответ:* 7.)

5. Используя свойства степеней, преобразуем данное уравнение:

$(3^x)^3 \cdot 3^{4+x} = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^{11} \cdot 9$ или $3^{3x} \cdot 3^{4+x} = 3^{1+2+3+\ldots+11} \cdot 3^2$.

Найдем сумму чисел: $1 + 2 + 3 + \ldots + 11 = (1 + 11) + (2 + 10) + (3 + 9) + (4 + 8) + (5 + 7) + 6 = 5 \cdot 12 + 6 = 60 + 6 = 66$. Тогда уравнение имеет вид $3^{3x} \cdot 3^{4+x} = 3^{66} \cdot 3^2$ или $3^{4x+4} = 3^{68}$.

Так как равны степени чисел с одинаковым основанием 3, то равны и показатели степеней: $4x + 4 = 68$ или $4x = 64$, откуда $x = 16$.

(*Ответ:* $x = 16$.)

6. Рассмотрим число $10^{273} + 7$. Число 10^{273} состоит из одной единицы и 273 нулей. Тогда число $10^{273} + 7$ состоит из одной единицы, 273 нулей и цифры 7, т. е. имеет вид 100...07. Сумма цифр этого числа равна 8, и по признаку делимости оно не делится на 9. Число 10^{19} состоит из одной единицы и 19 нулей. Поэтому число $10^{19} - 1$ состоит из 19 девяток (т. е. 99...9). Очевидно, что такое число делится на 9, так как каждая цифра числа делится на 9. Следовательно, число $10^{273} + 7$ не делится на число $10^{19} - 1$ без остатка, так как не имеет делителя 9.

(*Ответ:* доказано.)

VI. Подведение итогов урока

Факультативные уроки. Зачет по теме «Степень с натуральным показателем»

Цели: сравнить успеваемость учащихся при одинаковой сложности заданий; иметь возможность повысить оценки за выполненные контрольные работы.

Тип уроков: уроки контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Общая характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий.

Соответственно, у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи представлены в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается 1 баллом, из блока В – 2 баллами, из блока С – 3 баллами. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Работа рассчитана на два урока.

III. Зачетная работа

Вариант 1

А

1. Вычислите: $\frac{11^2 - 5 \cdot 3^3 + 3 \cdot 2^4}{6^3 - 15 \cdot 4^2 + 5 \cdot 2^3}$.

2. Найдите значение одночлена $7a^3b^2c$ при $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$ и $c = \frac{1}{5}$.

3. Докажите, что число $1723^{2576} - 3$ является составным.

4. Выполните действия:

а) $(3x^2yz^3)^2 \cdot (2xy^2z)^3$; б) $(4x^3y^2z^4)^2 : (6xyz^2)^3$.

5. График функции $y = ax^2$ проходит через точку A (3; 4). Найдите коэффициент a.

6. Составьте таблицу значений функции $y = (x + 1)^2$ в промежутке $-3 \le x \le 1$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

7. Сравните числа $2 \cdot 3^7 \cdot 10^6$ и $9 \cdot 2^7 \cdot 15^5$.

В

8. Определите последнюю цифру числа $327^{153} + 536^{164}$.

9. Сколько сомножителей (слагаемых) находится в правой части равенства:

а) $2^{300} = 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2$; б) $2^{300} = 2 + 2 + ... + 2$?

10. График функции $y = ax^2 + b$ проходит через точки A (0; 3) и B (2; –3). Найдите величины a и b.

11. Постройте график функции $y = x^2 + \frac{|x|}{x}$.

С

12. Докажите, что число $3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{120}$ без остатка делится на 5.

13. Выполните действия: $\frac{x^n \cdot y^{2n+1} \cdot (x^2y)^n}{(x^ny^n)^3}$.

14. Постройте график уравнения $|y - x^2| = 2x$.

Вариант 2

А

1. Вычислите: $\frac{13^2 - 7\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4}{7^2 - 11\cdot 4^2 + 6\cdot 2^5}$.

2. Найдите значение одночлена $5a^2b^3c$ при $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$ и $c = \frac{1}{5}$.

3. Докажите, что число $1927^{1634} - 7$ является составным.

4. Выполните действия:

а) $(2xy^3z^2)^3 \cdot (3x^2yz)^2$; б) $(5x^2y^3z^4)^3 : (3x^2yz^2)^3$.

5. График функции $y = ax^2$ проходит через точку A (–3; 5). Найдите коэффициент a.

6. Составьте таблицу значений функции $y = (x - 1)^2$ в промежутке $-1 \le x \le 3$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

7. Сравните числа $3^8 \cdot 10^7$ и $9 \cdot 2^7 \cdot 15^7$.

B

8. Определите последнюю цифру числа $523^{161} + 175^{234}$.

9. Сколько сомножителей (слагаемых) находится в правой части равенства:

а) $3^{200} = 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3$; б) $3^{200} = 3 + 3 + \ldots + 3$?

10. График функции $y = ax^2 + b$ проходит через точки A (0; 2) и B (2; –4). Найдите величины a и b.

11. Постройте график функции $y = x^2 - \frac{x}{|x|}$.

C

12. Докажите, что число $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{160}$ без остатка делится на 5.

13. Выполните действия: $\frac{x^{2n}\cdot y^{n+1}\cdot (x^n y^n)^2}{x^n (x^3y^3)^n}$.

14. Постройте график уравнения $|y - x^2| = -2x$.

IV. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

А

1. Используя определение степени с натуральным показателем, получаем

$$\frac{11^2 - 5\cdot 3^3 + 3\cdot 2^4}{6^3 - 15\cdot 4^2 + 5\cdot 2^3} = \frac{121 - 5\cdot 27 + 3\cdot 16}{216 - 15\cdot 16 + 5\cdot 8} = \frac{121 - 135 + 48}{216 - 240 + 40} = \frac{34}{16} =$$

$$= \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}.$$

(*Ответ:* $2\frac{1}{8}$.)

2. Подставим данные значения величин $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$ и $c = \frac{1}{5}$ в одночлен $7a^3b^2c$ и получим $7 \cdot 2^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 7 \cdot 8 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{56}{45} = 1\frac{11}{45}$.

(*Ответ:* $1\frac{11}{45}$.)

3. Очевидно, что любое нечетное число в любой степени будет числом нечетным. Поэтому число 1723^{2576} нечетное. Разность двух нечетных чисел будет числом четным. Следовательно, число $1723^{2576} - 3$ является четным и делится без остатка на 2. Так как данное число, кроме единицы и самого себя, имеет и другой делитель, то по определению оно является составным.

(*Ответ:* доказано.)

4. Используя свойства степеней, выполним действия:

а) $(3x^2yz^3)^2 \cdot (2xy^2z)^3 = 3^2 \cdot (x^2)^2 \cdot y^2 \cdot (z^3)^2 \cdot 2^3 \cdot x^3 \cdot (y^2)^3 \cdot z^3 = (9 \cdot 8) \cdot (x^4 \cdot x^3) \cdot (y^2 \cdot y^6) \cdot (z^6 \cdot z^3) = 72x^7y^8z^9$.

б) $(4x^3y^2z^4)^2 : (6xyz^2)^3 = (4^2 \cdot x^6 \cdot y^4 \cdot z^8) : (6^3 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z^6) = (16 : 216) \cdot (x^6 : x^3) \cdot (y^4 : y^3) \cdot (z^8 : z^6) = (16 : 216) \cdot x^{6-3} \cdot y^{4-3} \times z^{8-6} = \frac{2}{27}x^3yz^2$.

(*Ответы:* а) $72x^7y^8z^9$; б) $\frac{2}{27} \cdot x^3yz^2$.)

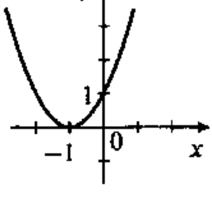
5. Так как график функции $y = ax^2$ проходит через точку A (3; 4), то координаты этой точки удовлетворяют уравнению функции, т. е. $4 = a \cdot 3^2$ или $4 = a \cdot 9$, откуда $a = \frac{4}{9}$.

(*Ответ:* $a = \frac{4}{9}$.)

6. Составим таблицу значений функции $y = (x + 1)^2$ в промежутке $-3 \le x \le 1$ с шагом 0,5.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

Отметим эти точки на координатной плоскости и построим график данной функции.



Легко догадаться, что этот график может быть получен из графика функции $y = x^2$ его сдвигом на одну единицу влево.

7. Разложим данные числа на простые множители: $2 \cdot 3^7 \times \times 10^6 = 2 \cdot 3^7 \cdot (2 \cdot 5)^6 = 2 \cdot 3^7 \cdot 2^6 \cdot 5^6 = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^6$ и $9 \cdot 2^7 \cdot 15^5 = 3^2 \cdot 2^7 \cdot (3 \cdot 5)^5 = 3^2 \cdot 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^5 = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^5$. Так как $5^6 > 5^5$, то и $2 \cdot 3^7 \cdot 10^6 > 9 \cdot 2^7 \cdot 15^5$.

(*Ответ:* $2 \cdot 3^7 \cdot 10^6 > 9 \cdot 2^7 \cdot 15^5$.)

В

8. Сначала определим последнюю цифру числа 327^{153}. Для этого найдем остаток от деления показателя степени 153 на 4. Он равен 1, т. е. $153 = 4 \cdot 38 + 1$. Тогда $327^{153} = 327^{4 \cdot 38+1}$. Так как при возведении числа в степень его последняя цифра повторяется через каждые 4 степени, то последние цифры чисел 327^{153} и 327^1 одинаковы и равны 7. Число, которое оканчивается цифрой 6, в любой степени также будет оканчиваться цифрой 6, т. е. 536^{164} оканчивается цифрой 6. Тогда последняя цифра числа $327^{153} + 536^{164}$ определяется суммой последних цифр этих чисел $7 + 6 = 13$ и равна 3.

(*Ответ:* 3.)

9. а) Пусть в правой части равенства $2^{300} = 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2$ находится n одинаковых множителей 2. Тогда по определению степени с натуральным показателем имеем $2^{300} = 2^n$. Так как равны степени с одинаковым основанием 2, то равны и показатели степеней: $300 = n$. Таким образом, в правой части находится 300 сомножителей.

б) Пусть в правой части равенства $2^{300} = 2 + 2 + ... + 2$ находится n одинаковых слагаемых 2. Заменим сложение умножением и получим $2^{300} = 2n$, откуда $n = 2^{300} : 2 = 2^{299}$. Таким образом, в правой части находится 2^{299} слагаемых.

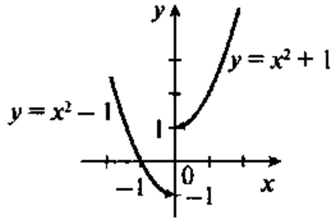
(*Ответы:* а) 300; б) 2^{299}.)

10. Так как график функции $y = ax^2 + b$ проходит через точки A (0; 3) и B (2; –3), то координаты этих точек удовлетворяют уравнению функции. Сначала запишем условие прохождения графика через точку A: $3 = a \cdot 0^2 + b$, откуда $b = 3$. Теперь функция имеет вид $y = ax^2 + 3$. Запишем условие прохождения графика через точку B: $-3 = a \cdot 2^2 + 3$ или $-6 = 4a$, откуда $a = -6 : 4 = -1{,}5$.

(*Ответ*: $a = -1{,}5$, $b = 3$.)

11. При построении графика функции $y = x^2 + \frac{|x|}{x}$ учтем, что $x \neq 0$, и раскроем знак модуля. При $x < 0$ получаем $|x| = -x$, и функция имеет вид $y = x^2 + \frac{-x}{x} = x^2 - 1$.

В промежутке $x < 0$ построим график $y = x^2 - 1$ (он получается смещением графика $y = x^2$ на одну единицу вниз).



При $x > 0$ получаем $|x| = x$, и функция имеет вид $y = x^2 + \frac{x}{x} = x^2 + 1$. В промежутке $x > 0$ построим график $y = x^2 + 1$ (он получается смещением графика $y = x^2$ на единицу вверх). Стрелками показано, что при $x = 0$ функция не определена (не имеет смысла).

С

12. Учтем, что при возведении любого числа в степень его последняя цифра повторяется при изменении показателя степени на 4. Поэтому в данной сумме последовательно сгруппируем слагаемые по четыре и получим $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{120} = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8) + \ldots + (3^{117} + 3^{118} + 3^{119} + 3^{120})$. Разберемся со слагаемыми в первых скобках: число 3 оканчивается на 3, число 3^2 – на 9, число 3^3 – на 7, число 3^4 – на 1. Поэтому последняя цифра числа $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$ определяется суммой последних цифр слагаемых: $3 + 9 + 7 + 1 = 20$, т. е. последняя цифра этой суммы равна 0. Очевидно, что числа $3^5, 3^9, \ldots, 3^{118}$ оканчиваются той же цифрой, что и число 3; числа $3^6, 3^{10}, \ldots, 3^{118}$ – той же цифрой, что и число 3^2, и т. д. Тогда очевидно, что суммы слагаемых, заключенных в скобки, оканчиваются одной и той же цифрой 0. Поэтому сумма всех слагаемых оканчивается цифрой 0. По признаку делимости такое число без остатка делится на 5.

(*Ответ:* доказано.)

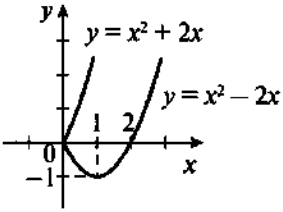
13. Используя свойства степеней, выполним действия:

$$\frac{x^n \cdot y^{2n+1} \cdot (x^2y)^n}{(x^ny^n)^3} = \frac{x^n \cdot y^{2n+1} \cdot (x^{2n} \cdot y^n)}{x^{3n} \cdot y^{3n}} = \frac{(x^n \cdot x^{2n}) \cdot (y^{2n+1} \cdot y^n)}{x^{3n} \cdot y^{3n}} =$$

$$= \frac{x^{n+2n} \cdot y^{2n+1+n}}{x^{3n} \cdot y^{3n}} = \frac{x^{3n} \cdot y^{3n+1}}{x^{3n} \cdot y^{3n}} = y^{3n+1-3n} = y^1 = y.$$

(*Ответ:* y.)

14. При построении графика зависимости $|y - x^2| = 2x$ учтем, что $2x \geq 0$, так как левая часть равенства при всех x и y неотрицательна. Тогда подмодульное выражение имеет вид $y - x^2 = 2x$ или $y - x^2 = -2x$, т. е. $y = x^2 + 2x$ или $y = x^2 - 2x$. Построим графики этих зависимостей (например, составив таблицы значений данных функций) в промежутке $x \geq 0$.



Вариант 2

А

1. Используя определение степени с натуральным показателем, получаем

$$\frac{13^2 - 7\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4}{7^2 - 11\cdot 4^2 + 6\cdot 2^5} = \frac{169 - 7\cdot 8 + 5\cdot 16}{49 - 11\cdot 16 + 6\cdot 32} = \frac{169 - 56 + 80}{49 - 176 + 192} = \frac{193}{65} =$$

$$= 2\frac{63}{65}.$$

(*Ответ:* $2\frac{63}{65}$.)

2. Подставим данные значения величин $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$ и $c = \frac{1}{5}$ в одночлен $5a^2b^3c$ и получим $5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right) = 5\cdot\frac{1}{4}\cdot 27\cdot\frac{1}{5} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$.

(*Ответ:* $6\frac{3}{4}$.)

3. Очевидно, что любое нечетное число в любой степени будет числом нечетным. Поэтому число 1927^{1634} нечетное. Разность двух нечетных чисел будет числом четным. Следовательно, число $1927^{1634} - 7$ является четным и делится без остатка на 2. Так как данное число, кроме единицы и самого себя, имеет и другой делитель, то по определению оно является составным.

(*Ответ:* доказано.)

4. Используя свойства степеней, выполним действия:

а) $(2xy^3z^2)^3\cdot(3x^2yz)^2 = 2^3\cdot x^3\cdot(y^3)^3\cdot(z^2)^3\cdot 3^2\cdot(x^2)^2\cdot y^2\cdot z^2 = (8\cdot 9)\cdot(x^3\cdot x^4)\cdot(y^9\cdot y^2)\cdot(z^6\cdot z^2) = 72x^7y^{11}z^8$.

б) $(5x^2y^3z^4)^3 : (3x^2yz^2)^2 = (5^3\cdot x^6\cdot y^9\cdot z^{12}) : (3^2\cdot x^4\cdot y^2\cdot z^4) = (125 : 9)\cdot(x^6 : x^4)\cdot(y^9 : y^2)\cdot(z^{12} : z^4) = \frac{125}{9}x^2y^7z^8$.

(*Ответы:* а) $72x^7y^{11}z^8$; б) $\frac{125}{9}x^2y^7z^8$.)

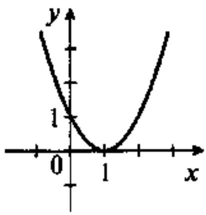
5. Так как график функции $y = ax^2$ проходит через точку A (–3; 5), то координаты этой точки удовлетворяют уравнению функции, т. е. $5 = a \cdot (-3)^2$ или $5 = a \cdot 9$, откуда $a = \frac{5}{9}$.

(*Ответ:* $a = \frac{5}{9}$.)

6. Составим таблицу значений функции $y = (x - 1)^2$ в промежутке $-1 \le x \le 3$ с шагом 0,5.

x	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

Отметим эти точки на координатной плоскости и построим график данной функции.



Легко догадаться, что этот график может быть получен из графика функции $y = x^2$ его сдвигом на одну единицу вправо.

7. Разложим данные числа на простые множители: $3^8 \cdot 10^7 = 3^8 \cdot (2 \cdot 5)^7 = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^7$ и $9 \cdot 2^7 \cdot 15^7 = 3^2 \cdot 2^7 \cdot (3 \cdot 5)^7 = 3^2 \cdot 2^7 \times 3^7 \cdot 5^7 = 2^7 \cdot 3^9 \cdot 5^7$. Так как $3^8 < 3^9$, то и $3^8 \cdot 10^7 < 9 \cdot 2^7 \cdot 15^7$.

(*Ответ:* $3^8 \cdot 10^7 < 9 \cdot 2^7 \cdot 15^7$.)

B

8. Сначала определим последнюю цифру числа 523^{161}. Для этого найдем остаток от деления показателя степени 161 на 4. Он равен 1, т. е. $161 = 4 \cdot 40 + 1$. Тогда $523^{161} = 523^{4 \cdot 40 + 1}$. Так как при возведении числа в степень его последняя цифра повторяется через каждые 4 степени, то последние цифры чисел 523^{161} и 523^1 одинаковы и равны 3. Число, которое оканчивается цифрой 5, в любой степени также будет оканчиваться цифрой 5, т. е. 175^{234} оканчивается цифрой 5. Тогда последняя цифра числа $523^{161} + 175^{234}$ определяется суммой последних цифр этих чисел $3 + 5 = 8$ и равна 8.

(*Ответ:* 8.)

9. а) Пусть в правой части равенства $3^{200} = 3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3$ находится n одинаковых множителей 3. Тогда по определению степени с натуральным показателем имеем $3^{200} = 3^n$. Так как равны степени с одинаковым основанием 3, то равны и показатели степеней: $200 = n$. Таким образом, в правой части находится 200 сомножителей.

б) Пусть в правой части равенства $3^{200} = 3 + 3 + ... + 3$ находится n одинаковых слагаемых 3. Заменим сложение умножением и получим $3^{200} = 3n$, откуда $n = 3^{200} : 3 = 3^{199}$. Таким образом, в правой части находится 3^{199} слагаемых.

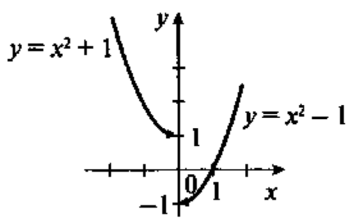
(*Ответы:* а) 200; б) 3^{199}.)

10. Так как график функции $y = ax^2 + b$ проходит через точки A (0; 2) и B (2; –4), то координаты этих точек удовлетворяют уравнению функции. Сначала запишем условие прохождения графика через точку A: $2 = a \cdot 0^2 + b$, откуда $b = 2$. Теперь функция имеет вид $y = ax^2 + 2$. Запишем условие прохождения графика через точку B: $-4 = a \cdot 2^2 + 2$ или $-6 = 4a$, откуда $a = -6 : 4 = -1,5$.

(*Ответ*: $a = -1,5$, $b = 2$.)

11. При построении графика функции $y = x^2 - \frac{x}{|x|}$ учтем, что $x \neq 0$, и раскроем знак модуля. При $x < 0$ получаем $|x| = -x$, и функция имеет вид $y = x^2 - \frac{x}{-x} = x^2 + 1$.

В промежутке $x < 0$ построим график $y = x^2 + 1$ (он получается смещением графика $y = x^2$ на одну единицу вверх).



При $x > 0$ получаем $|x| = x$, и функция имеет вид $y = x^2 - \frac{x}{x} = x^2 - 1$. В промежутке $x > 0$ построим график $y = x^2 - 1$ (он получается смещением графика $y = x^2$ на единицу вниз). Стрелками показано, что при $x = 0$ функция не определена (не имеет смысла).

C

12. Учтем, что при возведении любого числа в степень его последняя цифра повторяется при изменении показателя степени на 4. Поэтому в данной сумме последовательно сгруппируем слагаемые по четыре и получим $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{160} = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + ... + (2^{157} + 2^{158} + 2^{159} + 2^{160})$. Разберемся со слагаемыми в первых скобках: число 2 оканчивается на 2, число 2^2 – на 4, число 2^3 – на 8, число 2^4 – на 6. Поэтому последняя цифра числа $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ определяется суммой последних цифр слагаемых: $2 + 4 + 8 + 6 = 20$, т. е. последняя цифра этой суммы равна 0. Очевидно, что числа $2^5, 2^9, ..., 2^{157}$ оканчиваются той же цифрой, что и число 2; числа $2^6, 2^{10}, ..., 2^{158}$ – той же цифрой, что и число 2^2, и т. д. Тогда очевидно, что суммы слагаемых, заключенных в скобки, оканчиваются одной и той же цифрой 0. Поэтому сумма всех слагаемых оканчивается цифрой 0. По признаку делимости такое число без остатка делится на 5.

(*Ответ:* доказано.)

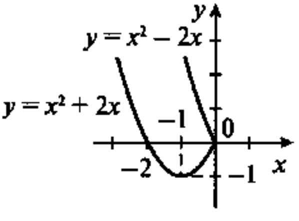
13. Используя свойства степеней, выполним действия:

$$\frac{x^{2n}\cdot y^{n+1}\cdot(x^n y^n)^2}{x^n(x^3y^3)^n}=\frac{x^{2n}\cdot y^{n+1}\cdot(x^{2n}\cdot y^{2n})}{x^n\cdot x^{3n}y^{3n}}=\frac{(x^{2n}\cdot x^{2n})\cdot(y^{n+1}\cdot y^{2n})}{(x^n\cdot x^{3n})\cdot y^{3n}}=$$

$$=\frac{x^{2n+2n}\cdot y^{n+1+2n}}{x^{n+3n}\cdot y^{3n}}=\frac{x^{4n}\cdot y^{3n+1}}{x^{4n}\cdot y^{3n}}=y^{3n+1-3n}=y^1=y.$$

(*Ответ:* y.)

14. При построении графика зависимости $|y - x^2| = -2x$ учтем, что $-2x \geq 0$ или $x \leq 0$, так как левая часть равенства при всех x и y неотрицательна. Тогда подмодульное выражение имеет вид $y - x^2 = -2x$ или $y - x^2 = -(-2x)$, т. е. $y = x^2 - 2x$ или $y = x^2 + 2x$. Построим графики этих зависимостей (например, составив таблицы значений данных функций) в промежутке $x \leq 0$.



V. Подведение итогов уроков

Глава IV
МНОГОЧЛЕНЫ

§ 9. СУММА И РАЗНОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ

Урок 45. Многочлен и его стандартный вид

Цель: ознакомить с понятием многочлена, его стандартным видом, понятием степени многочлена.

Планируемые результаты: научиться записывать многочлен в стандартном виде и определять степень многочлена.

Тип урока: урок изучения нового материала.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

Многочленом называется алгебраическая сумма (т. е. сумма или разность) одночленов. Одночлены, входящие в многочлен, называются членами многочлена. Одночлен считают многочленом, состоящим из одного члена.

Пример 1

а) Выражения $3a^2 - 5ab^3$, $7x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 10y^7 + 8$ являются многочленами, так как являются алгебраическими суммами одночленов (члены первого многочлена: $3a^2$ и $-5ab^3$, члены второго: $7x^2$, $-5x^2y$, $3xy^2$, $-10y^7$ и 8).

б) Выражения $3a^2 - 5a : b^3$, $(7x^3 - 5x^2) : y + 3xy^3 - 10 : y^7 + 8$ не являются многочленами, так как состоят не только из одночленов (содержат операции деления).

Многочлен, состоящий из двух членов, называют *двучленом*; из трех членов — *трехчленом*.

Одночлены называются *подобными*, если они отличаются коэффициентами или ничем не отличаются друг от друга.

Пример 2

а) Одночлены $-0,3ab^2c^3$ и $2ab^2c^3$ подобные, так как отличаются только коэффициентами (–0,3) и 2.

б) Одночлены $-0,3ab^2c^3$ и $-0,3ab^2c^3$ подобные, так как не отличаются друг от друга.

в) Одночлены $-0,3ab^2c^3$ и $2a^2b^2c^3$ не являются подобными, так как отличаются степенями переменной a: a и a^2.

В многочленах принято алгебраические суммы подобных одночленов заменять одним одночленом. Такая операция называется ***приведением*** подобных членов.

Пример 3

Упростим многочлен $A = 7ab - 3bc + ac - 2ab - 4bc + 3ab + bc$.

В многочлене A есть две группы подобных одночленов: $7ab$, $-2ab$, $3ab$ и $-3bc$, $-4bc$, bc. Кроме того, есть многочлен ac, который не имеет себе подобных в многочлене A. Сгруппируем указанные группы одночленов, т. е. запишем A в следующем виде: $A = (7ab - 2ab + 3ab) + (-3bc - 4bc + bc) + ac$.

Далее учтем, что $7ab - 2ab + 3ab = ab \cdot (7 - 2 + 3) = ab \cdot 8 = 8ab$; $-3bc - 4bc + bc = bc \cdot (-3 - 4 + 1) = bc \cdot (-6) = -6bc$.

Поэтому многочлен имеет вид $A = 8ab - 6bc + ac$.

Полученный многочлен A имеет *стандартный вид*, так как каждый входящий в него одночлен записан в стандартном виде и приведены подобные члены.

Больше ничего для записи многочлена в стандартном виде не требуется. Порядок слагаемых уже неважен. Например, запись многочлена $A = ac + 8ab - 6bc$ также считается его стандартным видом.

Таким образом, в отличие от одночлена многочлен может быть записан в стандартном виде не одним способом, а несколькими.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. В примере 3 все одночлены, входящие в многочлен A, имеют степень 2. Поэтому и данный многочлен имеет вторую степень. Для определения степени произвольного многочлена надо предварительно записать его в стандартном виде.

Пример 4

Запишем в стандартном виде многочлен $A = 3ab \cdot 2bc - 3a^2bc +$ $+ 2a(-b^2c) + ac(-4ab) + 2a(-4bc)$.

Прежде всего, запишем каждый из входящих в A одночленов в стандартном виде: $A = 6ab^2c - 3a^2bc - 2ab^2c - 4a^2bc - 8abc$.

Сгруппируем подобные члены: $A = (6ab^2c - 2ab^2c) + (-3a^2bc -$ $- 4a^2bc) - 8abc$.

Приведем подобные члены: $A = 4ab^2c - 7a^2bc - 8abc$. Полученная форма многочлена A есть его стандартный вид.

При другом расположении членов в многочлене A он также считается записанным в стандартном виде.

Например, $A = -8abc - 7a^2bc + 4ab^2c$ или $A = -7a^2bc - 8abc + 4ab^2c$ также стандартный вид этого многочлена.

В многочлене A степень одночлена $4ab^2c$ равна четырем, степень одночлена $7a^2bc$ – также четырем и степень одночлена $8abc$ равна трем. Поэтому наибольшая степень одночленов – четыре – и является степенью данного многочлена.

Если в многочлен входит только одна переменная, то его стандартным видом является такая форма записи, при которой одночлены располагаются в порядке убывания степеней переменной.

Пример 5

Запишем в стандартном виде многочлен $A = 5x^2 \cdot (3x^3) \cdot x + 3x + 2x^3 - 7 + (2x^2)^2 - 5x^3$.

Прежде всего, каждый одночлен многочлена A запишем в стандартном виде: $A = 15x^6 + 3x + \underline{2x}^3 - 7 + 4x^4 - \underline{5x}^3$.

Затем приведем подобные члены (они подчеркнуты): $A = 15x^6 + 3x - 3x^3 - 7 + 4x^4$.

И наконец, расположим члены в порядке убывания степеней x (начиная с наибольшей степени и кончая членом, который вообще не зависит от x). Тогда получим $A = 15x^6 + 4x^4 - 3x^3 + 3x - 7$.

Это и есть стандартный вид данного многочлена.

Отметим, что другое расположение слагаемых уже не является стандартным видом многочлена, например $A = 15x^6 + 4x^4 + 3x - 3x^3 - 7$, так как слагаемое $3x$ расположено ранее слагаемого $-3x^3$.

Также напомним, что наивысшая степень одночлена, входящего в многочлен, считается степенью многочлена. В данном примере многочлен A имеет шестую степень.

Заметим, что одночлен можно рассматривать как многочлен, состоящий из одного члена.

III. Задания на уроке

№ 567 (а), 568 (а, б), 570, 572, 576 (б), 577 (а), 579 (а, г), 581.

IV. Контрольные вопросы

– Дайте определение многочлена. Приведите примеры многочленов:

а) с одной переменной;

б) с несколькими переменными.

– Как привести многочлен к стандартному виду?
– Как определить степень многочлена?

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 567 (б), 568 (в, г), 571, 573, 576 (а), 578 (б), 579 (б, д).

Уроки 46, 47. Сложение и вычитание многочленов

Цель: сформировать представление об операциях сложения и вычитания многочленов.

Планируемые результаты: научиться складывать и вычитать многочлены.

Тип уроков: урок проблемного изложения, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение многочлена. Как привести его к стандартному виду?

2. Запишите в стандартном виде многочлен $6x^2y - 3x(yx) + 2yx \cdot x - 2xy^2 + 3xy \cdot y$ и определите его степень. Найдите его значение при $x = -2$, $y = 3$.

3. Запишите в виде многочлена двузначное число AB.

Вариант 2

1. Дайте определение многочлена. Как определить его степень?

2. Запишите в стандартном виде многочлен $2ab \cdot b^2 - a \cdot 2 \cdot b^3 + 5(ab)^2 + ab \cdot b^2 - 4a \cdot (ab) \cdot b$ и определите его степень. Найдите его значение при $a = 2$, $b = -3$.

3. Запишите в виде многочлена трехзначное число ABC.

III. Работа по теме уроков

Чтобы найти алгебраическую сумму многочленов, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены. При этом если перед скобкой стоит знак «+», то знаки слагаемых, стоящих в скобках, *не меняются.* Если перед скобкой стоит знак «–», то знаки слагаемых внутри скобок *меняются на противоположные.*

Пример 1

Найдем сумму многочленов $A = 6a^2 + 3ab - 2b^2$ и $B = -3a^2 - 5ab + 4b^2$. Составим сумму этих многочленов, учитывая правила, раскроем скобки и приведем подобные члены.

Получаем $A + B = (6a^2 + 3ab - 2b^2) + (-3a^2 - 5ab + 4b^2) = 6a^2 + 3ab - 2b^2 - 3a^2 - 5ab + 4b^2 = (6a^2 - 3a^2) + (3ab - 5ab) + (-2b^2 + 4b^2) = 3a^2 - 2ab + 2b^2$.

Результатом сложения многочленов A и B также является многочлен $3a^2 - 2ab + 2b^2$.

Пример 2

Найдем разность многочленов A и B из примера 1. Составим разность этих многочленов, учитывая правила, раскроем скобки и приведем подобные члены.

Получаем $A - B = (6a^2 + 3ab - 2b^2) - (-3a^2 - 5ab + 4b^2) = 6a^2 + 3ab - 2b^2 + 3a^2 + 5ab - 4b^2 = (6a^2 + 3a^2) + (3ab + 5ab) + (-2b^2 - 4b^2) = 9a^2 + 8ab - 6b^2$.

Результатом вычитания многочленов A и B также является многочлен $9a^2 + 8ab - 6b^2$.

Разумеется, можно складывать и вычитать любое количество многочленов.

Пример 3

Найдем многочлен $A + B - C$, если $A = a^2 - b^2 + 2ab$, $B = 2a^2 - 3ab - 4b^2$, $C = 4a^2 - 3ab - 7b^2$.

Получаем $A + B - C = (a^2 - b^2 + 2ab) + (2a^2 - 3ab - 4b^2) - (4a^2 - 3ab - 7b^2) = a^2 - b^2 + 2ab + 2a^2 - 3ab - 4b^2 - 4a^2 + 3ab + 7b^2$.

Сгруппируем в полученном многочлене подобные члены, а затем приведем их: $A + B - C = (a^2 + 2a^2 - 4a^2) + (-b^2 - 4b^2 + 7b^2) + (2ab - 3ab + 3ab) = -a^2 + 2b^2 + 2ab$.

При сложении и вычитании многочленов также получается многочлен.

Иногда требуется решить обратную задачу – представить данный многочлен в виде суммы или разности многочленов. При этом пользуются *правилом* раскрытия скобок:

1. Если перед скобками стоит знак «+», то члены, которые заключены в скобки, записывают с теми же знаками.

2. Если перед скобками стоит знак «–», то члены, которые заключены в скобки, записывают с противоположными знаками.

Пример 4

Пусть дан многочлен $A = 2a^2 - 3ab + 4b^2$. Запишем его в виде суммы и разности двух многочленов.

а) $A = 2a^2 - 3ab + 4b^2 = 2a^2 + (-3ab + 4b^2)$. Данный многочлен A представлен в виде суммы многочленов $2a^2$ и $-3ab + 4b^2$.

б) $A = 2a^2 - 3ab + 4b^2 = 2a^2 - (3ab - 4b^2)$. Данный многочлен A представлен в виде разности многочленов $2a^2$ и $3ab - 4b^2$.

Очевидно, что многочлен A можно записать в виде суммы двух многочленов и иными способами:

$A = (2a^2 - 3ab) + 4b^2$,

или $A = (a^2 - 3ab) + (a^2 + 4b^2)$,

или $A = (3a^2 - ab) + (-a^2 - 2ab + 4b^2)$ и т. д.

IV. Задания на уроках

№ 585, 587 (а, г), 588 (б), 589 (а, б), 591 (а), 592 (б), 593 (а), 594 (г), 595 (а, в), 597, 600, 603 (а), 605 (г), 607, 609 (а).

V. Контрольные вопросы

– Сформулируйте правила раскрытия скобок.
– Как складываются и вычитаются многочлены?
– Как представить многочлен в виде суммы или разности многочленов? Поясните на примерах.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 586, 587 (б, д), 588 (г), 589 (в, г), 591 (б), 592 (а), 593 (б), 594 (в), 595 (б, г), 598, 601, 603 (б), 605 (д), 608, 609 (б).

§ 10. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА И МНОГОЧЛЕНА

Урок 48. Умножение одночлена на многочлен

Цель: рассмотреть умножение одночлена на многочлен.

Планируемые результаты: научиться перемножать одночлен и многочлен.

Тип урока: урок изучения нового материала.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Упростите выражение $3x^2y - (2x^2y - xy) + (xy - yx^2)$ и найдите его значение при $xy = -3$.

2. Докажите, что значение выражения $6a^2b^2 + (3ab^2 - 2a^2b^2) - (4a^2b^2 + ab^2) - 2ab^2$ не зависит от значений переменных a и b.

3. Какой остаток при делении на 4 дает сумма четырех последовательных натуральных чисел?

Вариант 2

1. Упростите выражение $5xy^2 - (3xy^2 + xy) + (4xy - 2y^2x)$ и найдите его значение при $xy = -4$.

2. Докажите, что значение выражения $5ab^2 - (3ab^2 + 3a^2b) + (2a^2b - 2ab^2) + a^2b$ не зависит от значений переменных a и b.

3. Какой остаток при делении на 5 дает сумма пяти последовательных натуральных чисел?

III. Работа по теме урока

Чтобы *умножить многочлен на одночлен*, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения алгебраически сложить.

Пример 1

Умножим многочлен $A = 3a^2 - 2ab + b^2$ на одночлен $B = -2ab$.

Получаем $A \cdot B = (3a^2 - 2ab + b^2) \cdot (-2ab) = 3a^2 \cdot (-2ab) - 2ab \times (-2ab) + b^2 \cdot (-2ab) = -6a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3$.

Заметим, что если многочлен имеет стандартный вид, то в результате такого умножения также получается многочлен стандартного вида, который уже не нуждается в приведении подобных членов.

Пример 2

Умножим одночлен $A = -2a^2$ на многочлен $B = 7a^3 - 5a^2 + 3a - 4$.

Получаем $A \cdot B = -2a^2 \cdot (7a^3 - 5a^2 + 3a - 4) = -2a^2 \cdot 7a^3 - 2a^2 \times (-5a^2) - 2a^2 \cdot 3a - 2a^2 \cdot (-4) = -14a^5 + 10a^4 - 6a^3 + 8a^2$.

Полученный многочлен имеет стандартный вид. Заметим, что промежуточные результаты можно не записывать. Тогда запись такого умножения выглядит короче: $A \cdot B = -2a^2 \cdot (7a^3 - 5a^2 + 3a - 4) = -14a^5 + 10a^4 - 6a^3 + 8a^2$.

Разумеется, многочлен можно умножить и на несколько одночленов. Сделать это можно двумя способами:

1. Умножить многочлен сначала на первый одночлен. В результате получается новый многочлен, который затем умножается на второй одночлен, и т. д.

2. Перемножить все одночлены. В результате получается новый одночлен, который затем умножается на данный многочлен.

Пример 3

Умножим многочлен $A = 3a^2 - 2ab + 5b^2$ на одночлены $B = 2a^2$ и $C = ab$.

Решим эту задачу двумя перечисленными способами.

1-й способ

Умножим многочлен A на одночлен B. Получаем новый многочлен $D = A \cdot B = (3a^2 - 2ab + 5b^2) \cdot 2a^2 = 6a^4 - 4a^3b + 10a^2b^2$.

Теперь умножим многочлен D на одночлен C. Получаем окончательный ответ – многочлен $F = D \cdot C = (6a^4 - 4a^3b + 10a^2b^2) \times \times ab = 6a^5b - 4a^4b^2 + 10a^3b^3$.

2-й способ

Перемножим одночлены B и C. Получаем новый одночлен $E = B \cdot C = 2a^2 \cdot ab = 2a^3b$.

Теперь умножим данный многочлен A на новый одночлен E. Получаем окончательный ответ – многочлен $F = A \cdot E = (3a^2 - - 2ab + 5b^2) \cdot 2a^3b = 6a^5b - 4a^4b^2 + 10a^3b^3$.

Разумеется, ответы совпадают в соответствии с сочетательным свойством умножения: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Однако даже при двух одночленах второй способ решения является более простым.

IV. Задания на уроке

№ 614, 617 (в), 618 (б), 620 (в, г), 623 (а), 625, 626, 628 (а).

V. Контрольные вопросы

– Как умножить одночлен на многочлен? Приведите примеры.
– Какое свойство умножения используется при умножении одночлена на многочлен?

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 615, 617 (е), 618 (в), 620 (д, е), 623 (б), 627, 628 (б).

Уроки 49, 50. Использование умножения одночлена на многочлен при преобразовании алгебраических выражений и решении уравнений

Цель: рассмотреть практическое применение операции умножения одночлена на многочлен.

Планируемые результаты: использовать умножение одночлена на многочлен для решения прикладных задач.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Выполните умножение:

а) $-3x^2y(2x - y + y^2)$; б) $2xy(3x - 2y^2 + 3xy) \cdot (-3x^2)$.

2. Упростите выражение $2(3x^2 - 5x + 1) - 3(2x^2 - 4x + 3)$ и вычислите его значение при $x = -2$.

3. Представьте выражение $3y(2y - x) - 2y^2(x + y^2)$ в виде многочлена и определите его степень.

Вариант 2

1. Выполните умножение:

а) $-2xy^2(2y - 3x + x^2)$; б) $3xy(2x - 3x^2 + 4xy) \cdot (-2y^2)$.

2. Упростите выражение $4(x^2 - 3x + 2) - 2(2x^2 - 5x + 1)$ и вычислите его значение при $x = -3$.

3. Представьте выражение $2xy(x - y) - 3x^2(x + y^2)$ в виде многочлена и определите его степень.

III. Работа по теме уроков

Навыки умножения одночлена на многочлен используются при преобразовании выражений и решении уравнений.

Пример 1

Упростим выражение $A = a(a + b - c) - b(a - b - c) + c(a - b + c)$ и вычислим его значение при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Получаем $A = a(a + b - c) - b(a - b - c) + c(a - b + c) = a^2 + ab - ac - ba + b^2 + bc + ca - cb + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Было учтено переместительное свойство умножения: $ba = ab$, $ca = ac$ и $cb = bc$. Найдем значение выражения: $A = a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$.

Пример 2

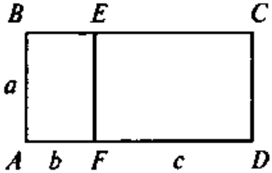
Докажем, что выражение $A = 2a^2(a + b) - 3b(a^2 + b) + a^2(b - 2a) + 3b^2$ принимает одно и то же значение при любых значениях переменных a и b.

Раскроем скобки и получим $A = 2a^3 + 2a^2b - 3ba^2 - 3b^2 + a^2b - 2a^3 + 3b^2 = 0$.

Вновь было учтено переместительное свойство умножения: $ba^2 = a^2b$.

Пример 3

На простейшем примере обоснуем геометрически правило умножения одночлена на многочлен, т. е. распределительный закон $a(b + c) = ab + ac$.



Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = a$ и $AD = b + c$. Его площадь $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a(b + c)$. Этот прямоугольник $ABCD$ состоит из прямоугольников $ABEF$ со сторонами $AB = a$ и $AF = b$ и площадью $S_{ABEF} = AB \cdot AF = a \cdot b$ и $FECD$ со сторонами $EF = a$ и $FD = c$ и площадью $S_{FECD} = EF \cdot FD = a \cdot c$. Очевидно, что $S_{ABCD} = S_{ABEF} + S_{FECD}$ или $a(b + c) = ab + ac$.

Пример 4

Решим уравнение $2x(x + 3) - x(2x + 4) = 6 - x$.

Умножим одночлены на многочлены (т. е. раскроем скобки) и приведем подобные члены. Получаем $2x^2 + 6x - 2x^2 - 4x = 6 - x$ или $2x = 6 - x$, откуда $x = 2$.

Пример 5

Решим уравнение $\frac{2x-7}{12} - \frac{4x+3}{18} = \frac{5x-6}{9}$.

Умножим все члены уравнения на наименьшее общее кратное чисел 12, 18, 9, т. е. НОК (12, 18, 9) = 36. Получаем

$\frac{2x-7}{12} \cdot 36 - \frac{4x+3}{18} \cdot 36 = \frac{5x-6}{9} \cdot 36$,

или $(2x - 7) \cdot 3 - (4x + 3) \cdot 2 = (5x - 6) \cdot 4$,

или $6x - 21 - 8x - 6 = 20x - 24$.

В левой части уравнения приведем подобные члены: $-2x - 27 = 20x - 24$ или $-3 = 22x$, откуда $x = -\frac{3}{22}$.

Пример 6

Решим уравнение $\frac{3x-8}{4} - \frac{2x-6}{3} = \frac{x}{12}$.

Умножим все члены уравнения на наименьшее общее кратное чисел 4, 3, 12, т. е. на число 12. Получаем

$\frac{3x-8}{4} \cdot 12 - \frac{2x-6}{3} \cdot 12 = \frac{x}{12} \cdot 12$,

или $(3x - 8) \cdot 3 - (2x - 6) \cdot 4 = x$,

или $9x - 24 - 8x + 24 = x$,

или $x = x$.

Таким образом, получим тождество $x = x$. Это означает, что решением данного уравнения является любое число x.

Разумеется, к появлению уравнений и дальнейшему их решению приводят и текстовые задачи.

Пример 7

В первый день завод выпустил на 8 т продукции больше, чем во второй. В третий день завод выпустил в 1,5 раза продукции больше, чем в первые два дня. Всего за эти три дня было выпущено 220 т продукции. Сколько тонн продукции выпускалось каждый день?

По условиям задачи в таблице приведены данные о выпуске продукции в каждый день. В качестве неизвестного x взято количество продукции (в тоннах), выпущенной заводом во второй день. Данные в остальных столбцах таблицы следуют из условий задачи.

День	1	2	1 + 2	3
Выпуск продукции	$x + 8$	x	$x + 8 + x$	$1{,}5(x + 8 + x)$

Теперь, исходя из условий задачи, подсчитываем общий выпуск продукции за три дня, используя данные таблицы. Получаем уравнение $x + 8 + x + 1{,}5(x + 8 + x) = 220$, или $2x + 8 + 1{,}5(2x + 8) = 220$, или $2x + 8 + 3x + 12 = 200$, или $5x + 20 = 220$, или $5x = 200$, откуда $x = 40$ (т).

На основе данных таблицы легко подсчитать количество продукции, выпущенной в каждый день.

В первый день: $x + 8 = 40 + 8 = 48$ (т);

во второй день: $x = 40$ (т);

в третий день: $1{,}5(x + 8 + x) = 1{,}5(2x + 8) = 3x + 12 = 3 \cdot 40 + 12 = 132$ (т).

(*Ответ:* было выпущено: в первый день – 48 т, во второй день – 40 т, в третий день – 132 т.)

IV. Задания на уроках

№ 630 (а, д), 631 (в), 632 (а, в), 633 (б, г), 635 (а), 637 (а, б), 639, 644, 646, 648.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 630 (в, е), 631 (г), 632 (б, г), 633 (а, в), 635 (г), 637 (в, г), 640, 645, 647, 649.

Уроки 51–53. Вынесение общего множителя за скобки

Цель: сформировать навыки разложения многочленов на множители.

Планируемые результаты: научиться выносить общий множитель за скобки.

Тип уроков: урок общеметодологической направленности, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-3}{5}-\frac{5x-4}{9}=\frac{4x+3}{15}$; б) $\frac{6x-4}{7}+\frac{2}{x-3}=\frac{2(3x-2)}{7}+\frac{2}{x-3}$.

2. Поезд уменьшил скорость с 80 км/ч до 60 км/ч. В результате он затратил на путь между городами на 30 мин больше. Найдите расстояние между городами.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\frac{5x-2}{4}-\frac{2x-4}{3}=\frac{x+3}{6}$; б) $\frac{10x-5}{3}-\frac{3}{x-1}=\frac{5(2x-1)}{3}-\frac{3}{x-1}$.

2. Поезд увеличил скорость с 50 км/ч до 75 км/ч. В результате он затратил на путь между городами на 40 мин меньше. Найдите расстояние между городами.

III. Работа по теме уроков

При алгебраических преобразованиях, решении уравнений, выполнении действий с алгебраическими дробями бывает полезно представить многочлен в виде произведения других многочленов (некоторые такие многочлены могут быть и одночленами). Такое представление многочлена называется *разложением* многочлена *на множители*.

Оно основано на распределительном свойстве: $ab + ac = a(b + c)$. При этом общий множитель a в членах ab и ac многочлена выносят за скобки. Поэтому такой способ разложения многочлена называют *вынесением общего множителя за скобки*.

Пример 1

Разложим на множители многочлен $A = 9a^2b^2 - 21a^2b^3$. Легко заметить, что члены $9a^3b^2$ и $21a^2b^3$ многочлена A имеют наибольший общий множитель $3a^2b^2$. Поэтому их можно записать в таком виде: $9a^3b^2 = 3a^2b^2 \cdot 3a$ и $21a^2b^3 = 3a^2b^2 \cdot 7b$.

Тогда данный многочлен имеет вид $A = 3a^2b^2 \cdot 3a - 3a^2b^2 \cdot 7b$.

Используя распределительное свойство, вынесем общий множитель $3a^2b^2$ за скобки и получим $A = 3a^2b^2(3a - 7b)$. Таким образом, данный многочлен A разложен на произведение одночлена $3a^2b^2$ и многочлена $3a - 7b$.

Заметим, что легко проверить правильность разложения на множители. Для этого надо выполнить обратное действие — перемножить одночлен $3a^2b^2$ и многочлен $3a - 7b$. Получаем $3a^2b^2(3a - 7b) = 3a^2b^2 \cdot 3a - 3a^2b^2 \cdot 7b = 9a^3b^2 - 21a^2b^3 = A$.

Так как в результате умножения вновь получен многочлен A, то его разложение на множители выполнено правильно.

Пример 2

Разложим на множители многочлен $A = 21a^3b^2 + 28a^2b^3 - 14ab$.

Легко заметить, что каждый член многочлена A имеет общий множитель – одночлен $7ab$. Поэтому многочлен A можно записать в таком виде: $A = 7ab \cdot 3a^2b + 7ab \cdot 4ab^2 - 7ab \cdot 2$. Теперь этот общий множитель $7ab$ можно вынести за скобки: $A = 7ab(3a^2b + 4ab^2 - 2)$.

Таким образом, многочлен A разложен на произведение одночлена $7ab$ и многочлена $3a^2b + 4ab^2 - 2$.

Правильность разложения на множители легко проверить.

Если умножить множители многочлена, то получится данный многочлен: $7ab(3a^2b + 4ab^2 - 2) = 7ab \cdot 3a^2b + 7ab \cdot 4ab^2 + 7ab \cdot (-2) = 21a^3b^2 + 28a^2b^3 - 14ab$.

Пример 3

Разложим на множители выражение $A = 2a^2b \cdot (2a + 3b) + 3c \cdot (2a + 3b)$.

Вынесем общий множитель $(2a + 3b)$ за скобки и получим $A = (2a + 3b)(2a^2b + 3c)$.

Итак, многочлен A разложен на множители – многочлены $2a + 3b$ и $2a^2b + 3c$.

Пример 4

Разложим на множители выражение $A = 7a^2(a - 3b) + (3b - a)b$.

Слагаемые в выражении A имеют множители $a - 3b$ и $3b - a$, которые отличаются друг от друга только знаком.

Поэтому в многочлене $3b - a$ выносим число -1 за скобки. Получаем $A = 7a^2(a - 3b) + b \cdot (-1)(a - 3b) = 7a^2(a - 3b) - b(a - 3b) = (a - 3b)(7a^2 - b)$.

Таким образом, данный многочлен A разложен на множители – многочлены $a - 3b$ и $7a^2 - b$.

Способ разложения на множители часто используется при решении уравнений и в задачах на делимость чисел.

Пример 5

Решим уравнение $3x^2 - 2x = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители. Для этого выносим общий множитель x за скобки. Получаем $x(3x - 2) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Имеем $x = 0$ или $3x - 2 = 0$ (корень этого линейного уравнения $x = \frac{2}{3}$).

Итак, данное уравнение имеет два корня: $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$.

Пример 6

Докажем, что выражение $4^6 + 4^8 - 7 \cdot 4^5$ делится на 61.

Вынесем в выражении $4^6 + 4^8 - 7 \cdot 4^5$ общий множитель 4^5 за скобки и получим $4^6 + 4^8 - 7 \cdot 4^5 = 4^5(4 + 64 - 7) = 4^5 \cdot 61$. Данное выражение представлено в виде произведения двух чисел, одно из которых равно 61. Поэтому данное выражение делится на 61.

IV. Задания на уроке

№ 655 (а, е), 657 (д, е), 659 (а, в), 661 (а, г), 662 (в, д), 665 (а, б), 668 (в, г), 672 (а, д).

V. Контрольные вопросы

- Какое преобразование называется разложением многочлена на множители? Приведите примеры.
- На каком свойстве основано вынесение общего множителя за скобки?
- Как выносится за скобки общий множитель? Поясните на примере.

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 655 (г, и), 657 (и, к), 659 (г, е), 661 (в, и), 662 (г, е), 665 (в, г), 668 (а, е), 672 (в, г).

Урок 54. Контрольная работа № 5 по теме «Сумма и разность многочленов. Произведение одночлена и многочлена»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). Можно рекомендовать следующий критерий оценки: при выполнении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые две решенные задачи, оценка «4» – за три задачи и оценка «5» – за четыре задачи. При выполнении вариантов 3, 4 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. При выполнении вариантов 5, 6 оценка «3» ставится за любые две решенные задачи, оценка «4» – за три задачи и оценка «5» – за четыре задачи. Одна задача дает учащимся некоторую свободу выбора. Все задачи в варианте примерно равноценны. Возможно, несколько труднее для учеников задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен ученикам (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий). При наличии такой техники в классе на стенде (после контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов.

Контрольная работа рассчитана на один урок.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень:

а) $2a^2 + 3a - 5b + 7ab - 2a - a + 4b - 5ab - a^2 - 2ab$;

б) $2a(3a + 4b) - 5b(a + b) - 5a^2 - 3ab + 6b^2$.

2. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $3a^3 - 12a^2 + 6a$; б) $15x^4y^3 - 5x^2y^2 + 10x^2y$.

3. Решите уравнение $\frac{x+3}{4} = \frac{2x-7}{5}$.

4. Туристы прошли некоторое расстояние со скоростью 5 км/ч и такое же расстояние проплыли на плоту со скоростью 2 км/ч. На весь этот путь было потрачено 7 ч. Какой путь преодолели туристы пешком и на плоту?

Вариант 2

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень:

а) $3a^2 + 7b - 3a + 5ab + 2a + a + 3b^2 - 6b - 3ab - 3b^2 - 2ab$;

б) $3a(4a + 3b) - 9b(a - b) - 12a^2 - 8b^2 + 2ab$.

2. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $4b^3 + 8b^2 - 12b$; б) $12x^3y^4 - 8x^2y^3 + 4x^2y$.

3. Решите уравнение $\frac{x-2}{3} = \frac{3x+1}{7}$.

4. Туристы прошли некоторое расстояние со скоростью 4 км/ч и такое же расстояние проплыли на лодке со скоростью 6 км/ч. На весь этот путь было потрачено 5 ч. Какой путь преодолели туристы пешком и на лодке?

Вариант 3

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень:

$$\left(3\frac{2}{3}x^2y\right)\left(\frac{9}{11}xy^3\right)-3x^2y^2\left(xy^2+xy\right)+2x^3y^3.$$

2. Упростите выражение $2xy(x+y)-3x^2y-xy^2$ и найдите его значение при $x=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{3}{2}$.

3. Разложите на множители выражение $6xy(2x-y)+5y(y-2x)$.

4. Решите уравнение $5x^2+0{,}2x=0$.

5. Докажите, что число $5^3+3\cdot5^4+2\cdot5^5$ кратно 66.

6. Поезд проходит расстояние между городами за 8 ч. Если он увеличит скорость на 20 км/ч, то преодолеет это расстояние за 6 ч. Найдите скорость поезда и расстояние между городами.

Вариант 4

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень: $\left(5\frac{1}{3}xy\right)\left(\frac{3}{8}x^3y^2\right)-2x^2y^2(x^2y-xy)+x^3y^3.$

2. Упростите выражение $3x^2(x-y)-2x^3+4x^2y$ и найдите его значение при $x=\frac{3}{2}$ и $y=\frac{1}{2}$.

3. Разложите на множители выражение $3xy(x-2y)+2x(2y-x)$.

4. Решите уравнение $3x^2+0{,}6x=0$.

5. Докажите, что число $4^3+8\cdot4^4+3\cdot4^5$ кратно 81.

6. Поезд проходит расстояние между городами за 9 ч. Если он увеличит скорость на 20 км/ч, то преодолеет это расстояние за 7 ч. Найдите скорость поезда и расстояние между городами.

Вариант 5

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида, определите его степень и найдите значение при $xy=5$:

$$(27xy^2)\cdot\left(\frac{1}{3}xy\right)^2-3x^2y(xy^3-xy^2)-2(xy)^3.$$

2. Разложите на множители выражение $4a^2b(2a-3b)+3ab-2a^2$.

3. Решите уравнение:

а) $3x+2x^3+5x^5=0$; б) $\frac{6x+7}{7}-2=\frac{3-5x}{14}$.

4. Докажите, что число $11\cdot3^4+5\cdot3^5+3^7$ кратно 53.

5. Знаменатель данной дроби на 5 больше ее числителя. Если ее числитель увеличить на 3, а знаменатель — на 1, то получится дробь $\frac{2}{3}$. Найдите данную дробь.

Вариант 6

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида, определите его степень и найдите значение при $xy = 3$:

$$(64x^2y)\cdot\left(\frac{1}{4}xy\right)^2 - 4xy^2(x^3y - x^2y) + 5(xy)^3.$$

2. Разложите на множители выражение $3ab^2(4a - b) - 20ab + 5b^2$.

3. Решите уравнение:

а) $7x + 4x^3 + 3x^5 = 0$; б) $\frac{x-4}{5} + 1 = \frac{2x+4}{9}$.

4. Докажите, что число $13 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^6 + 4^8$ кратно 89.

5. Знаменатель данной дроби на 4 больше ее числителя. Если ее числитель и знаменатель увеличить на 1, то получится дробь $\frac{1}{2}$. Найдите данную дробь.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ — число решивших задачу правильно или почти правильно;

± — число решивших задачу со значительными погрешностями;

– — число не решивших задачу;

∅ — число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 — 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности.

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. а) $a^2 - b$ (вторая степень); б) $a^2 + b^2$ (вторая степень).

2. а) $3a(a^2 - 4a + 2)$; б) $5x^2y(3x^2y^2 - y + 2)$.

3. $x = 14\frac{1}{3}$.

4. 10 км пешком и 10 км на плоту.

Вариант 2

1. а) $3a^2 + b$ (вторая степень); б) $b^2 + 2ab$ (вторая степень).

2. а) $4b(b^2 + 2b - 3)$; б) $4x^2y(3xy^3 - 2y^2 + 1)$.

3. $x = -8{,}5$.

4. 12 км пешком и 12 км на лодке.

Вариант 3

1. $-x^3y^3$ (шестая степень).

2. $\frac{3}{4}$.

3. $y(2x - y)(6x - 5)$.

4. $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}04$.

5. Доказано.

6. 60 км/ч и 480 км.

Вариант 4

1. $3x^3y^3$ (шестая степень).

2. $\frac{9}{2}$.

3. $x(x - 2y)(3y - 2)$.

4. $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}2$.

5. Доказано.

6. 70 км/ч и 630 км.

Вариант 5

1. Выполним указанные действия: $27xy^2 \cdot \frac{1}{9}x^2y^2 - 3x^3y^4 + 3x^3y^3 - 2x^3y^3 = 3x^3y^4 - 3x^3y^4 + x^3y^3 = x^3y^3$.

Учтены правила действий с числами с натуральными степенями. Многочлен (который в данном случае является одночленом) x^3y^3 имеет шестую степень. Значение этого многочлена при $xy = 5$: $5^3 = 125$.

(*Ответ:* x^3y^3, шестая степень, 125.)

2. В данном выражении из двух последних членов вынесем за скобки общий множитель $-a$ и получим $4a^2b(2a - 3b) - a(2a - 3b) = (2a - 3b)(4a^2b - a) = (2a - 3b) \cdot a(4ab - 1) = a(2a - 3b)(4ab - 1)$.

(*Ответ:* $a(2a - 3b)(4ab - 1)$.)

3. а) Разложим левую часть уравнения на множители, вынеся x за скобки. Получаем $x(3 + 2x^2 + 5x^4) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Первый множитель равен нулю при $x = 0$. Второй множитель $3 + 2x^2 + 5x^4 \neq 0$ при всех x, так как $x^2 \geq 0$ и $x^4 \geq 0$.

б) Умножим все члены уравнения на число 14 и получим $\frac{6x+7}{7}\cdot 14 - 2\cdot 14 = \frac{3-5x}{14}\cdot 14$, или $(6x + 7)\cdot 2 - 28 = 3 - 5x$, или $12x + 14 - 28 = 3 - 5x$, или $17x = 17$, откуда $x = 1$.

(*Ответы:* а) $x = 0$; б) $x = 1$.)

4. Вынесем за скобки общий множитель 3^4 и получим $11\cdot 3^4 + 5\cdot 3^5 + 3^7 = 3^4(11 + 5\cdot 3 + 3^3) = 3^4(11 + 15 + 27) = 3^4\cdot 53$. Так как число имеет множитель 53, то оно и кратно 53.

(*Ответ:* доказано.)

5. Пусть числитель дроби равен x, знаменатель равен $(x + 5)$, т. е. дробь имеет вид $\frac{x}{x+5}$. После того как ее числитель увеличили на 3, а знаменатель – на 1, получили дробь $\frac{x+3}{x+6}$, которая равна $\frac{2}{3}$. Имеем уравнение $\frac{x+3}{x+6} = \frac{2}{3}$, или $3(x + 3) = 2(x + 6)$, или $3x + 9 = 2x + 12$, откуда $x = 3$.

Итак, данная дробь $\frac{x}{x+5} = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$.

(*Ответ:* $\frac{3}{8}$.)

Вариант 6

1. Выполним указанные действия: $64x^2y\cdot\frac{1}{16}x^2y^2 - 4x^4y^3 - 4x^3y^3 + 5x^3y^3 = 4x^4y^3 - 4x^4y^3 + x^3y^3 = x^3y^3$.

Учтены правила действий с числами с натуральными степенями. Многочлен (который в данном случае является одночленом) x^3y^3 имеет шестую степень. Значение этого многочлена при $xy = 3$: $3^3 = 27$.

(*Ответ:* x^3y^3, шестая степень, 27.)

2. В данном выражении из двух последних членов вынесем за скобки общий множитель $(-5b)$ и получим $3ab^2(4a - b) - 5b(4a - b) = (4a - b)(3ab^2 - 5b) = (4a - b)\cdot b(3ab - 5) = b(4a - b)(3ab - 5)$.

(*Ответ:* $b(4a - b)(3ab - 5)$.)

3. а) Разложим левую часть уравнения на множители, вынеся x за скобки. Получаем $x(7 + 4x^2 + 3x^4) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Первый множитель равен нулю при $x = 0$. Второй множитель $7 + 4x^2 + 3x^4 \neq 0$ при всех x, так как $x^2 \geq 0$ и $x^4 \geq 0$.

б) Умножим все члены уравнения на число 45 и получим $\frac{x-4}{5}\cdot 45 + 1\cdot 45 = \frac{2x+4}{9}\cdot 45$, или $(x - 4)\cdot 9 + 45 = (2x + 4)\cdot 5$, или $9x - 36 + 45 = 10x + 20$, откуда $x = -11$.

(*Ответы:* а) $x = 0$; б) $x = -11$.)

4. Вынесем за скобки общий множитель 4^5 и получим $13 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^6 + 4^8 = 4^5(13 + 3 \cdot 4 + 4^3) = 4^5(13 + 12 + 64) = 4^5 \cdot 89$.

Так как число имеет множитель 89, то оно и кратно 89.

(*Ответ:* доказано.)

5. Пусть числитель дроби равен x, знаменатель равен $(x + 4)$, т. е. дробь имеет вид $\frac{x}{x+4}$. После того как ее числитель и знаменатель увеличили на 1, получили дробь $\frac{x+1}{x+5}$, которая равна $\frac{1}{2}$. Имеем уравнение $\frac{x+1}{x+5} = \frac{1}{2}$, или $2(x + 1) = x + 5$, или $2x + 2 = x + 5$, откуда $x = 3$.

Поэтому данная дробь $\frac{x}{x+4} = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$.

(*Ответ:* $\frac{3}{7}$.)

VI. Подведение итогов урока

§ 11. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Уроки 55, 56. Умножение многочлена на многочлен

Цель: развить навыки умножения многочлена на многочлен.

Планируемые результаты: научиться перемножать многочлены.

Тип уроков: урок изучения нового материала, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения алгебраически сложить.

Пример 1

Перемножим многочлены $A = 3a - 2b$ и $B = 2a + 3b$.

Выполним умножение поэтапно: умножим каждый член, входящий в A, на многочлен B, а затем умножим одночлены на многочлен (в соответствии с указанным правилом). Тогда получаем $A \cdot B = (3a - 2b) \cdot (2a + 3b) = 3a(2a + 3b) - 2b(2a + 3b) = 6a^2 + 9ab - 4ba - 6b^2$.

Теперь осталось только привести подобные члены: $A \cdot B = 6a^2 + 5ab - 6b^2$ (здесь учтено, что $ba = ab$).

Заметим, что результатом умножения многочлена на многочлен также является многочлен. При этом если один множитель состоял из m членов, а второй — из n членов, то в произведении (до приведения подобных членов) будет mn членов. Этим можно пользоваться для контроля преобразований. В рассмотренном примере многочлены A и B состояли из двух членов. Поэтому в многочлене $6a^2 + 9ab - 4ba - 6b^2$ имеется $2 \cdot 2 = 4$ члена.

Когда имеется несколько многочленов, умножение выполняется поочередно, при этом после очередного умножения приводятся подобные члены.

Пример 2

Перемножим многочлены $A = a - 2b$, $B = 2a + 3b$, $C = 3a + b$.

Перемножим сначала многочлены A и B: $A \cdot B = (a - 2b)(2a + 3b) = a \cdot (2a + 3b) - 2b(2a + 3b) = 2a^2 + 3ab - 4ba - 6b^2 = 2a^2 - ab - 6b^2$.

Теперь полученный многочлен умножим на C: $(A \cdot B) \cdot C = (2a^2 - ab - 6b^2)(3a + b) = (2a^2 - ab - 6b^2) \cdot 3a + (2a^2 - ab - 6b^2) \cdot b = 6a^3 - 3a^2b - 18ab^2 + 2a^2b - ab^2 - 6b^3 = 6a^3 - a^2b - 19ab^2 - 6b^3$.

Умножение многочленов используется при преобразовании выражений, решении уравнений, в задачах на делимость чисел и т. д.

Пример 3

Упростим выражение $A = (a^3 + 2b)(a^2 - 2b) - (a^2 + 2b)(a^3 - 2b)$.

Чтобы преобразовать выражение A, перемножим входящие в него многочлены и приведем подобные члены. Получаем $A = a^3 \cdot a^2 - a^3 \cdot 2b + 2b \cdot a^2 + 2b \cdot (-2b) - a^2 \cdot a^3 - a^2 \cdot (-2b) - 2b \cdot a^3 - 2b \cdot (-2b) = a^5 - 2a^3b + 2a^2b - 4b^2 - a^5 + 2a^2b - 2a^3b + 4b^2 = -4a^3b + 4a^2b = 4a^2b(1 - a)$.

Пример 4

Решим уравнение

$(3x + 2)(2x + 3) - (x + 4)(x - 2) = (5x + 2)(x - 1)$.

Преобразуем обе части уравнения, перемножая многочлены и приводя подобные члены. Получаем $6x^2 + 9x + 4x + 6 - x^2 + 2x - 4x + 8 = 5x^2 - 5x + 2x - 2$, или $11x + 14 = -3x - 2$, или $11x + 3x = -14 - 2$, или $14x = -16$, откуда $x = -\frac{16}{14} = -\frac{8}{7} = -1\frac{1}{7}$.

Пример 5

Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $A = (n + 1)(n + 2) - (3n - 1)(n + 3) + 5n(n + 2) + n + 7$ кратно 3.

Перемножим многочлены и приведем подобные члены. Получаем $A = n^2 + 2n + n + 2 - 3n^2 - 9n + n + 3 + 5n^2 + 10n + n + 7 = 3n^2 + 6n + 12 = 3 \cdot (n^2 + 2n + 4)$.

При любом натуральном n значение выражения $n^2 + 2n + 4$ является натуральным числом. Поэтому значение выражения A кратно 3 при любом натуральном значении n.

III. Задания на уроках

№ 677 (а–в), 680 (в, г), 682 (а, б), 683 (д–з), 685 (а, б), 686 (а), 687 (а, д), 688.

IV. Контрольные вопросы

– Как перемножить многочлены? Приведите примеры.
– Какое выражение является результатом умножения многочлена на многочлен?

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 677 (г–е), 680 (д, е), 682 (в, г), 683 (а–г), 685 (в, г), 686 (б), 687 (б, е), 689.

Уроки 57, 58. Разложение многочлена на множители способом группировки

Цель: ознакомить учащихся с еще одним способом разложения многочлена на множители.

Планируемые результаты: научиться раскладывать многочлен на множители способом группировки.

Тип уроков: урок-исследование, продуктивный урок.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Как умножить многочлен на многочлен?

2. Перемножьте многочлены:

а) $(a - 2b)(4a + 3b)$; б) $(2ab - 3)(3a + b - 2)$.

3. Решите уравнение $(2x - 3)(3x + 4) = 8 + (3x - 1)(2x + 3)$.

4. Докажите, что если натуральные числа m и n при делении на 3 дают в остатке 2, то их произведение mn при делении на 3 дает в остатке 1.

Вариант 2

1. Какое выражение является результатом умножения многочлена на многочлен?

2. Перемножьте многочлены:

а) $(2a - b)(3a + 4b)$; б) $(3ab - 2)(2a + b - 3)$.

3. Решите уравнение $(4x - 3)(2x + 1) = 5 + (2x - 3)(4x + 1)$.

4. Докажите, что если натуральные числа m и n при делении на 4 дают в остатке 2, то их произведение mn при делении на 4 дает в остатке 0 (т. е. кратно 4).

III. Работа по теме уроков

В ряде случаев *все члены* многочлена *не имеют* общего множителя, однако определенные *группы* данных членов такой множитель *имеют*. Этот факт может быть использован для разложения многочлена на множители.

Пример 1

Разложим на множители многочлен $A = 3ab + b^2 + 3ac + bc$.

Сгруппировав члены $3ab$, $3ac$ и b^2, bc, т. е. $A = (3ab + 3ac) + (b^2 + bc)$, увидим, что в первой группе есть общий множитель $3a$, во второй группе – общий множитель b. Вынесем эти множители за скобки и получим $A = 3a(b + c) + b(b + c)$.

Теперь видно, что есть общий множитель $b + c$, который также можно вынести за скобки: $A = (b + c)(3a + b)$.

Многочлен A разложен на множители – многочлены $b + c$ и $3a + b$.

Заметим, что члены многочлена A можно сгруппировать и по-другому. Например: $A = (3ab + b^2) + (3ac + bc) = b(3a + b) + c(3a + b) = (3a + b)(b + c)$.

Разумеется, независимо от способа первоначальной группировки членов многочлена A было получено то же самое разложение на множители: $A = (3a + b)(b + c)$.

Из примера видно, что для использования такого способа разложения необходимо сгруппировать члены многочлена, имеющие общий множитель, и вынести этот множитель за скобки.

Часто при использовании такого способа разложения некоторые члены многочлена приходится записывать в виде суммы двух слагаемых.

Пример 2

Разложим на множители многочлен $A = a^2 + 9a + 20$.

Очевидно, что члены многочлена, а также различные группы членов общего множителя не имеют. Поэтому одночлен $9a$ представим в виде суммы двух членов, т. е. $9a = 4a + 5a$. Тогда данный многочлен имеет вид $A = a^2 + 4a + 5a + 20$. Попарно сгруппируем члены, имеющие общий множитель: $A = (a^2 + 4a) + (5a + 20)$.

Слагаемые в первых скобках имеют общий множитель a, во вторых скобках – общий множитель 5. Вынесем эти множители за скобки: $A = a(a + 4) + 5(a + 4)$.

Теперь слагаемые имеют общий множитель $(a + 4)$, который вынесем за скобки: $A = (a + 4)(a + 5)$.

Таким образом, данный многочлен A разложен на множители – многочлены $a + 4$ и $a + 5$.

Пример 3

Разложим на множители многочлен $A = a^2 - 5ab + 6b^2$.

Этот пример аналогичен предыдущему. Поэтому одночлен $5ab$ представим в виде суммы двух членов, т. е. $5ab = 2ab + 3ab$. Тогда данный многочлен имеет вид $A = (a^2 - 2ab) + (-3ab + 6b^2)$.

Слагаемые в первых скобках имеют общий множитель a, во вторых скобках – общий множитель $-3b$. Вынесем эти множители за скобки: $A = a(a - 2b) - 3b(a - 2b)$.

Теперь слагаемые имеют общий множитель $a - 2b$, который вынесем за скобки: $A = (a - 2b)(a - 3b)$.

Итак, данный многочлен A разложен на множители – многочлены $a - 2b$ и $a - 3b$.

Этот прием разложения многочленов на множители также используется при решении уравнений, в задачах на делимость чисел.

Пример 4

Решим уравнение $x^2 - x - 2 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители. Для этого одночлен $-x$ представим в виде $-x = x - 2x$. Тогда уравнение имеет следующий вид: $x^2 + x - 2x - 2 = 0$, или $(x^2 + x) + (-2x - 2) = 0$, или $x(x + 1) - 2(x + 1) = 0$, или $(x + 1)(x - 2) = 0$.

Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из этих множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения $x + 1 = 0$ (корень $x = -1$) и $x - 2 = 0$ (корень $x = 2$). Итак, данное квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ имеет два корня $x = -1$ и $x = 2$.

Пример 5

Докажем, что при любом натуральном значении n значение выражения $A = n^3 + 3n^2 + 2n$ кратно 6.

Разложим многочлен A на множители. Сначала используем способ вынесения общего множителя за скобки и получаем $A = n(n^2 + 3n + 2)$.

Теперь способом группировки разложим квадратный трехчлен $n^2 + 3n + 2$ на множители. Представим одночлен $3n$ в виде $3n = n + 2n$. Тогда получаем $n^2 + 3n + 2 = n^2 + n + 2n + 2 = (n^2 + n) + (2n + 2) = n(n + 1) + 2(n + 1) = (n + 1)(n + 2)$.

Выражение A имеет вид $A = n(n + 1)(n + 2)$. Так как n – натуральное число, то числа n, $n + 1$, $n + 2$ – три последовательных натуральных числа. Среди любых трех последовательных натуральных чисел (например, 13, 14, 15) хотя бы одно кратно 2 и хотя бы одно кратно 3. Поэтому произведение таких чисел будет кратно $2 \cdot 3 = 6$. Итак, при любом натуральном значении n значение выражения $A = n^3 + 3n^2 + 2n$ кратно 6.

IV. Задания на уроках

№ 708 (а, б), 709 (а, в, д), 711 (д–з), 712 (а, в), 713, 716 (а, б), 717 (а), 718 (в, г).

V. Контрольные вопросы

– В каком случае используется способ группировки членов при разложении многочленов на множители?
– Как разложить многочлен на множители способом группировки? Поясните на примерах.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 708 (в, г), 709 (б, г, е), 711 (а–в), 712 (б, г), 714, 716 (в, г), 717 (б), 718 (а, б).

Уроки 59, 60. Доказательство тождеств

Цель: научить использовать способы преобразования многочленов для доказательства тождеств.

Планируемые результаты: научиться доказывать тождества.

Тип уроков: уроки-практикумы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Разложите на множители выражение:

а) $a(b - c) + 2b - 2c$; б) $2x^2 + xy - y^2$.

2. Решите уравнение:

а) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$; б) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Вариант 2

1. Разложите на множители выражение:

а) $a(b + c) + 4b + 4c$; б) $3x^2 - 2xy - y^2$.

2. Решите уравнение:

а) $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$; б) $x^2 - 6x + 8 = 0$.

III. Работа по теме уроков

Напомним, что тождеством называется равенство, верное при любых значениях переменных. Чтобы доказать, что некоторое равенство является тождеством (чтобы доказать тождество), используют тождественные преобразования выражений. При этом можно доказать, что:

1) левая часть равенства после преобразования равна правой;

2) правая часть равенства после преобразований равна левой;

3) обе части равенства после преобразований равны одному и тому же выражению.

Пример 1

Докажем тождество $a(b - c) - c(b - a) = b(a - c)$.

Преобразуем левую часть равенства. Для этого раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем $a(b - c) - c(b - a) = ab - ac - bc + ac = ab - bc$.

Вынесем общий множитель b за скобки: $ab - bc = b(a - c)$.

В результате тождественных преобразований было показано, что левая часть равенства равна правой. Таким образом, тождество доказано.

Пример 2

Докажем тождество $6x^2 + 19x - 7 = (3x - 1)(2x + 7)$.

Преобразуем правую часть равенства. Для этого раскроем скобки, перемножив двучлены, и приведем подобные члены. Получаем $(3x - 1)(2x + 7) = 3x \cdot 2x + 3x \cdot 7 - 1 \cdot 2x - 1 \cdot 7 = 6x^2 + 21x - 2x - 7 = 6x^2 + 19x - 7$.

В результате тождественных преобразований было показано, что правая часть равенства равна левой. Итак, тождество доказано.

Пример 3

Докажем тождество $(3a - 2b)(2a + 5b) - 6ab = (a - 2b)(6a + 3b) + 14ab - 4b^2$.

Преобразуем левую часть равенства. Для этого перемножим двучлены и приведем подобные члены. Получаем $(3a - 2b)(2a + 5b) - 6ab = 6a^2 + 15ab - 4ab - 10b^2 - 6ab = 6a^2 + 5ab - 10b^2$.

Преобразуем правую часть равенства, выполнив аналогичные действия. Получаем $(a - 2b)(6a + 3b) + 14ab - 4b^2 = 6a^2 + 3ab - 12ab - 6b^2 + 14ab - 4b^2 = 6a^2 + 5ab - 10b^2$.

В результате тождественных преобразований было показано, что и левая, и правая части равенства равны одному и тому же выражению $6a^2 + 5ab - 10b^2$. Следовательно, тождество доказано.

IV. Задания на уроках

№ 663 (а, б), 665 (б, в), 690 (а), 691, 693 (а), 694 (б), 695 (а), 699 (б), 780 (а, б), 783 (а), 785 (б).

V. Контрольные вопросы

– Какое равенство называется тождеством?

– Как доказать, что равенство является тождеством?

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 663 (в, г), 665 (а, г), 690 (б), 692, 693 (б), 694 (а), 695 (б), 699 (а), 780 (в, г), 783 (б), 785 (а).

Урок 61. Контрольная работа № 6 по теме «Многочлены»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко, поэтому можно рекомендовать следуюший критерий оценки: при выполнении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает учащимся некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 к набранным баллам добавляются дополнительно 0,5 балла, за решение задач вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (т. е. оценка «5» выставляется уже за четыре задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Возможно, несколько труднее для учеников задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен ученикам (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий). При наличии такой техники в классе на стенде (после контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов.

Контрольная работа рассчитана на один урок.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Упростите выражение:

а) $3(x - 2y) - 2(3x - y)$;

б) $(2a - 3b)(a + b) - (a - 2b)(a - b)$.

2. Разложите на множители многочлен:

а) $6ab - 3b^2$; б) $ac + bc - 3a - 3b$.

3. Решите уравнение:

а) $2x^3 + 3x = 0$; б) $4(x + 1) = 5(x - 2)$.

4. Докажите, что выражение $27^2 - 18^2$ кратно 5.

5. Катер с собственной скоростью 20 км/ч проплыл 4 ч по течению реки и 6 ч – против течения. Весь путь катера составил 196 км. Найдите скорость течения реки.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x} + 1$.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

а) $2(x - 3y) - 3(x + y)$;

б) $(3a - b)(a + 2b) - (2a - b)(a - b)$.

2. Разложите на множители многочлен:

а) $8ab - 2b^3$;

б) $ac - bc + 2a - 2b$.

3. Решите уравнение:

а) $5x + 3x^3 = 0$; б) $7(x - 3) = 6(x - 2)$.

4. Докажите, что выражение $21^2 - 14^2$ кратно 5.

5. Катер с собственной скоростью 30 км/ч проплыл 3 ч по течению реки и 6 ч – против течения. Весь путь катера составил 261 км. Найдите скорость течения реки.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x} - 1$.

Вариант 3

1. Упростите выражение

$3a^2(b^2 - 27a^2b^4) - 10ab(0{,}3ab - 1) + (9a^2b^2)^2$.

2. Разложите на множители выражение:

а) $2ax + 3by + 6ay + bx$;

б) $(3a - 2b)^2 - (a + b)(3a - 2b)$.

3. Решите уравнение:

а) $\dfrac{2x + 3}{4} - \dfrac{x + 7}{12} = \dfrac{3x - 1}{3}$;

б) $(3x + 1)(4x - 5) = (3x + 1)(2x - 1)$.

4. Докажите, что выражение $3 \cdot 2^{34} + 5 \cdot 2^{33} - 7 \cdot 2^{31}$ кратно 37.

5. Если одну сторону квадрата увеличить на 6 см, а другую сторону увеличить на 3 см, то площадь получившегося прямоугольника будет на 99 см^2 больше площади квадрата. Найдите периметр квадрата.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x + 2} - 1$.

Вариант 4

1. Упростите выражение
$4a^2(b^2 + 16a^2b^4) - 20ab(0{,}2ab - 1) - (8a^2b^2)^2$.

2. Разложите на множители выражение:
а) $ay - 12bx + 3ax - 4by$;
б) $(2a - 5b)^2 - (a + 2b)(2a - 5b)$.

3. Решите уравнение:
а) $\dfrac{3x+2}{4} - \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{2x+1}{12}$;
б) $(2x + 3)(5x - 3) = (2x + 3)(2x + 6)$.

4. Докажите, что выражение $5 \cdot 2^{48} - 3 \cdot 2^{47} - 4 \cdot 2^{45}$ кратно 24.

5. Если одну сторону квадрата увеличить на 7 см, а другую сторону увеличить на 3 см, то площадь получившегося прямоугольника будет на 141 см^2 больше площади квадрата. Найдите периметр квадрата.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} + 1$.

Вариант 5

1. Докажите, что при всех значениях a, b и c значение выражения $2a(a + b - c) - 2b(a - b - c) + 2c(a - b + c)$ больше числа $-\dfrac{3}{7}$.

2. Разложите на множители выражение:
а) $18a^2 + 27ab + 14ac + 21bc$;
б) $a(3a - 2b)^2 + b(3a - 2b)(b + 3a)$.

3. Решите уравнение:
а) $x^2 + 8x + 15 = 0$; б) $x^2 - 4 = 0$.

4. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $n^2 + 3n + 1$ будет нечетным числом.

5. Найдите целые значения x и y, удовлетворяющие равенству $y(x - 2) = 13 - 5x$.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x} + 1$.

Вариант 6

1. Докажите, что при всех значениях a, b и c значение выражения $3c(a + b - c) + 3b(a - b - c) - 3a(a + b + c)$ меньше числа $\dfrac{2}{3}$.

2. Разложите на множители выражение:
а) $16ab + 5bc + 10c^2 + 32ac$;
б) $b(2a - 3b)^2 + a(2a - 3b)(b + 2a)$.

3. Решите уравнение:

а) $x^2 + 7x + 10 = 0$; б) $x^2 - 9 = 0$.

4. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $n^2 + 5n + 3$ будет нечетным числом.

5. Найдите целые значения x и y, удовлетворяющие равенству $x(y + 4) = 3y + 15$.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x} + 1$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности.

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. а) $-3x - 4y$; б) $a^2 + 2ab - 5b^2$.

2. а) $3b(2a - b)$; б) $(a + b)(c - 3)$.

3. а) $x = 0$; б) $x = 14$.

4. Доказано.

5. 2 км/ч.

6. Прямая $y = x - 1$, $x \neq 0$.

Вариант 2

1. а) $-x - 9y$; б) $a^2 + 8ab - 3b^2$.

2. а) $2b(4a - b^2)$; б) $(a - b)(c + 2)$.

3. а) $x = 0$; б) $x = 9$.

4. Доказано.

5. 3 км/ч.

6. Прямая $y = x + 1$, $x \neq 0$.

Вариант 3

1. $10ab$.

2. а) $(x + 3y)(2a + b)$; б) $(3a - 2b)(2a - 3b)$.

3. а) $x = \frac{6}{7}$; б) $x = -\frac{1}{3}$ и $x = 2$.

4. Доказано.

5. 36 см.

6. Парабола $y = x^2 - 1$, $x \neq -2$.

Вариант 4

1. $20ab$.

2. а) $(y + 3x)(a - 4b)$; б) $(2a - 5b)(a - 7b)$.

3. а) $x = 5$; б) $x = -1,5$ и $x = 3$.

4. Доказано.

5. 48 см.

6. Парабола $y = x^2 + 1$, $x \neq 2$.

Вариант 5

1. Упростим данное выражение. Для этого раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем $2a(a + b - c) - 2b(a - b - c) + 2c(a - b + c) = 2a^2 + 2ab - 2ac - 2ba + 2b^2 + 2bc + 2ca - 2cb + 2c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$. При всех значениях переменных a, b и c выражения $a^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$ и $c^2 \geq 0$. Поэтому выражение $2(a^2 + b^2 + c^2)$ больше любого отрицательного числа (например, числа $-\frac{3}{7}$).

(*Ответ:* доказано.)

2. Разложим данное выражение на множители.

а) Сгруппируем члены и вынесем общие множители за скобки: $18a^2 + 27ab + 14ac + 21bc = (18a^2 + 27ab) + (14ac + 21bc) = 9a(2a + 3b) + 7c(2a + 3b) = (2a + 3b)(9a + 7c)$.

б) В выражении вынесем общий множитель $3a - 2b$ за скобки: $a(3a - 2b)^2 + b(3a - 2b)(b + 3a) = (3a - 2b)(a(3a - 2b) + b(b + 3a)) = (3a - 2b)(3a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = (3a - 2b)(3a^2 + ab + b^2)$.

(*Ответы:* а) $(2a + 3b)(9a + 7c)$; б) $(3a - 2b)(3a^2 + ab + b^2)$.)

3. Для решения данного уравнения разложим левую часть на множители.

а) В уравнении $x^2 + 8x + 15 = 0$ член $8x$ представим в виде суммы слагаемых: $8x = 3x + 5x$. Запишем уравнение в виде $x^2 + 3x + 5x + 15 = 0$, или $(x^2 + 3x) + (5x + 15) = 0$, или $x(x + 3) + 5(x + 3) = 0$, или $(x + 3)(x + 5) = 0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения $x + 3 = 0$ (корень $x = -3$) и $x + 5 = 0$ (корень $x = -5$).

Итак, уравнение имеет два корня.

б) В уравнении $x^2 - 4 = 0$ добавим и вычтем $2x$. Тогда уравнение имеет вид $x^2 + 2x - 2x - 4 = 0$, или $(x^2 + 2x) + (-2x - 4) = 0$, или $x(x + 2) - 2(x + 2) = 0$, или $(x + 2)(x - 2) = 0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения $x + 2 = 0$ (корень $x = -2$) и $x - 2 = 0$ (корень $x = 2$).

Это уравнение также имеет два корня.

(*Ответы:* а) $x = -3$ и $x = -5$; б) $x = -2$ и $x = 2$.)

4. Запишем данное выражение в виде $n^2 + 3n + 1 = n^2 + n + 2n + 1 = (n^2 + n) + 2n + 1 = n(n + 1) + 2n + 1$. При любом натуральном значении n числа n и $n + 1$ — два последовательных натуральных числа, поэтому одно из них число четное и произведение $n(n + 1)$ будет четным числом. Число $2n$ имеет множитель 2 и также является четным. Поэтому сумма четных чисел $n(n + 1)$ и $2n$ и нечетного числа 1 будет числом нечетным.

(*Ответ:* доказано.)

5. Преобразуем данное равенство $y(x - 2) = 13 - 5x$. Для этого запишем его в виде $y(x - 2) + 5x - 10 = 3$, или $y(x - 2) + 5(x - 2) = 3$, или $(x - 2)(y + 5) = 3$.

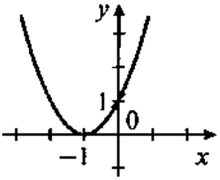
По условию числа x и y — целые, поэтому числа $x - 2$ и $y + 5$ также являются целыми. Тогда левая часть равенства является произведением двух целых чисел, которые будут делителями числа 3, стоящего в правой части. Рассмотрим четыре случая:

1) $x - 2 = 1$ и $y + 5 = 3$ (откуда $x = 3$ и $y = -2$);
2) $x - 2 = -1$ и $y + 5 = -3$ (откуда $x = 1$ и $y = -8$);
3) $x - 2 = 3$ и $y + 5 = 1$ (откуда $x = 5$ и $y = -4$);
4) $x - 2 = -3$ и $y + 5 = -1$ (откуда $x = -1$ и $y = -6$).

(*Ответ:* $x = 3$, $y = -2$; $x = 1$, $y = -8$; $x = 5$, $y = -4$; $x = -1$, $y = -6$.)

6. Преобразуем данную функцию $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x} + 1$. Учтем, что знаменатель $x \neq 0$. Разложим числитель дроби на множители и сократим дробь: $y = \dfrac{x(x^2 + 2x)}{x} + 1 = x^2 + 2x + 1$.

Данную функцию можно записать в виде $y = (x + 1)^2$. Построим график этой функции (парабола). Он получается из графика функции $y = x^2$ его смещением на одну единицу влево. Удалим из графика точку с абсциссой $x = 0$ (показана стрелками).



Вариант 6

1. Упростим данное выражение. Для этого раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем $3c(a + b - c) + 3b(a - b - c) - 3a(a + b + c) = 3ac + 3cb - 3c^2 + 3ba - 3b^2 - 3bc - 3a^2 - 3ab - 3ac = -3a^2 - 3b^2 - 3c^2 = -3(a^2 + b^2 + c^2)$.

При всех значениях переменных a, b и c выражения $a^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$ и $c^2 \geq 0$. Поэтому выражение $-3(a^2 + b^2 + c^2)$ меньше любого положительного числа (например, числа $\frac{2}{3}$).

(*Ответ:* доказано.)

2. Разложим данное выражение на множители.

а) Сгруппируем члены и вынесем общие множители за скобки: $16ab + 5bc + 10c^2 + 32ac = (16ab + 5bc) + (10c^2 + 32ac) = b(16a + 5c) + 2c(5c + 16a) = b(16a + 5c) + 2c(16a + 5c) = (16a + 5c)(b + 2c)$.

б) В выражении вынесем общий множитель $2a - 3b$ за скобки: $b(2a - 3b)^2 + a(2a - 3b)(b + 2a) = (2a - 3b)(b(2a - 3b) + a(b + 2a)) = (2a - 3b)(2ab - 3b^2 + ab + 2a^2) = (2a - 3b)(2a^2 + 3ab - 3b^2)$.

(*Ответы:* а) $(16a + 5c)(b + 2c)$; б) $(2a - 3b)(2a^2 + 3ab - 3b^2)$.)

3. Для решения данного уравнения разложим левую часть на множители.

а) В уравнении $x^2 + 7x + 10 = 0$ член $7x$ представим в виде суммы слагаемых: $7x = 2x + 5x$. Запишем уравнение в виде $x^2 + 2x + 5x + 10 = 0$, или $(x^2 + 2x) + (5x + 10) = 0$, или $x(x + 2) + 5(x + 2) = 0$, или $(x + 2)(x + 5) = 0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения $x + 2 = 0$ (корень $x = -2$) и $x + 5 = 0$ (корень $x = -5$).

Итак, уравнение имеет два корня.

б) В уравнении $x^2 - 9 = 0$ добавим и вычтем $3x$. Тогда уравнение имеет вид $x^2 + 3x - 3x - 9 = 0$, или $(x^2 + 3x) + (-3x - 9) = 0$, или $x(x + 3) - 3(x + 3) = 0$, или $(x + 3)(x - 3) = 0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения $x + 3 = 0$ (корень $x = -3$) и $x - 3 = 0$ (корень $x = 3$).

Это уравнение также имеет два корня.

(*Ответы:* а) $x = -2$ и $x = -5$; б) $x = -3$ и $x = 3$.)

4. Запишем данное выражение в виде $n^2 + 5n + 3 = n^2 + n + 4n + 3 = (n^2 + n) + 4n + 3 = n(n + 1) + 4n + 3$. При любом натуральном значении n числа n и $n + 1$ – два последовательных натуральных числа, поэтому одно из них число четное и произведение $n(n + 1)$ будет четным числом. Число $4n$ имеет множитель 4 и также является четным. Поэтому сумма четных чисел $n(n + 1)$ и $4n$ и нечетного числа 3 будет числом нечетным.

(*Ответ:* доказано.)

5. Преобразуем данное равенство $x(y + 4) = 3y + 15$. Для этого запишем его в виде $x(y + 4) - 3y - 12 = 3$, или $x(y + 4) - 3(y + 4) = 3$, или $(y + 4)(x - 3) = 3$.

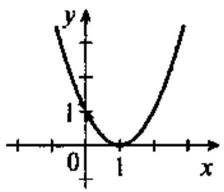
По условию числа x и y – целые, поэтому числа $y + 4$ и $x - 3$ также являются целыми. Тогда левая часть равенства является произведением двух целых чисел, которые будут делителями числа 3, стоящего в правой части. Рассмотрим четыре случая:

1) $y + 4 = 1$ и $x - 3 = 3$ (откуда $x = 6$ и $y = -3$);
2) $y + 4 = -1$ и $x - 3 = -3$ (откуда $x = 0$ и $y = -5$);
3) $y + 4 = 3$ и $x - 3 = 1$ (откуда $x = 4$ и $y = -1$);
4) $y + 4 = -3$ и $x - 3 = -1$ (откуда $x = 2$ и $y = -7$).

(*Ответ:* $x = 6$, $y = -3$; $x = 0$, $y = -5$; $x = 4$, $y = -1$; $x = 2$, $y = -7$.)

6. Преобразуем данную функцию $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x} + 1$. Учтем, что знаменатель $x \neq 0$. Разложим числитель дроби на множители и сократим дробь: $y = \dfrac{x(x^2 - 2x)}{x} + 1 = x^2 - 2x + 1$.

Данную функцию можно записать в виде $y = (x - 1)^2$. Построим график этой функции (парабола). Он получается из графика функции $y = x^2$ его смещением на одну единицу вправо. Удалим из графика точку с абсциссой $x = 0$ (показана стрелками).



VI. Подведение итогов урока

Факультативные уроки. Зачет по теме «Многочлены»

Цели: сравнить успеваемость учащихся при одинаковой сложности заданий; иметь возможность повысить оценки за выполненные контрольные работы.

Тип уроков: уроки контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Общая характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий.

Соответственно, у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные – в блоке В, еше сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается 1 баллом, из блока В – 2 баллами, из блока С – 3 баллами. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Работа рассчитана на два урока.

III. Зачетная работа

Вариант 1

А

1. Выполните действия:

а) $3a^2(5a^2 - 2a)$; б) $(2a - 3b)(5a + 7b)$.

2. Упростите выражение $(2x - 3)(3x + 7) - (x - 5)(5x + 6) - x^2$ и вычислите его значение при $x = \frac{11}{24}$.

3. Приведите выражение $(2a^3 + b^2)(6a - b^2) - 12a^4 + b^4$ к многочлену стандартного вида и определите его степень.

4. Решите уравнение:

а) $7x + 15 = 2(x - 3)$; б) $\frac{6x+3}{x} = \frac{3(2x+1)}{x}$.

5. Разложите на множители многочлен:

а) $3x^2y + 6xy - 15x^2y^2$; б) $2x + 7y + 14 + xy$.

6. Докажите, что выражение $21^4 - 7^5 + 14^4$ кратно 90.

7. Поезд проехал третью часть расстояния между городами со скоростью 40 км/ч, а оставшийся путь – со скоростью 60 км/ч. Поездка заняла 7 ч. Найдите расстояние между городами и среднюю скорость поезда.

В

8. Найдите значение выражения

$a^2(a^2 - 3ab + 4) - 3ab(a^2 - 3ab + 4)$, если $a^2 - 3ab + 1 = 7$.

9. Разложите на множители выражение:

а) $(2a^2 - 3b)^2 - (2a^2 - 3b)(4a - 3b)$;

б) $a^2 - 6ab + 8b^2$.

10. Решите графически уравнение $2x - 3 = x - 1$.

11. Петя задумал число и прибавил к нему 5. Результат умножил на 7. Потом вычел удвоенное задуманное число. Полученное число разделил на 5. Потом вычел задуманное число. Какое число получил Петя?

C

12. Упростите выражение

$(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - a(a - 2)(a + 2) + 8$.

13. Решите уравнение $(x^2 - 3x)^2 + 2(x^2 - 3x) = 0$.

14. При каком значении параметра a уравнения $6(x - 3) = 2(x + 1)$ и $2x^2 + 3ax - 1 = 0$ имеют общий корень?

Вариант 2

A

1. Выполните действия:

а) $2a^3(4a^2 - 7a)$; б) $(3a - 7b)(5a + 2b)$.

2. Упростите выражение $(2x - 3)(5x + 4) - (3x - 2)(2x + 4) - 4x^2$ и вычислите его значение при $x = \frac{2}{5}$.

3. Приведите выражение $(3a^3 + b^2)(5a - b^2) - 15a^4 + b^4$ к многочлену стандартного вида и определите его степень.

4. Решите уравнение:

а) $8x + 19 = 3(x - 4)$; б) $\frac{8x+4}{x} = \frac{4(2x+1)}{x}$.

5. Разложите на множители многочлен:

а) $4xy^2 - 8xy + 12x^2y^2$; б) $3x + 5y + 15 + xy$.

6. Докажите, что выражение $27^4 - 9^5 + 18^4$ кратно 88.

7. Поезд проехал четвертую часть расстояния между городами со скоростью 50 км/ч, а оставшийся путь — со скоростью 30 км/ч. Поездка заняла 6 ч. Найдите расстояние между городами и среднюю скорость поезда.

B

8. Найдите значение выражения

$a^2(a^2 - 5ab + 3) - 5ab(a^2 - 5ab + 3)$, если $a^2 - 5ab + 2 = 5$.

9. Разложите на множители выражение:

а) $(3a^2 - 2b)^2 - (3a^2 - 2b)(5a - 2b)$;

б) $a^2 - 7ab + 10b^2$.

10. Решите графически уравнение $4 - 2x = x + 1$.

11. Вася задумал число и прибавил к нему 7. Результат умножил на 5. Потом прибавил удвоенное задуманное число. Полученное число разделил на 7. Потом вычел задуманное число. Какое число получил Вася?

C

12. Упростите выражение

$(a + 3)(a^2 - 3a + 9) - a(a - 1)(a + 1) - 27$.

13. Решите уравнение $(x^2 + 5x)^2 + 6(x^2 + 5x) = 0$.

14. При каком значении параметра a уравнения $5(x - 4) = 3(x - 2)$ и $3x^2 + 2ax - 5 = 0$ имеют общий корень?

IV. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

А

1. а) $15a^4 - 6a^3$; б) $10a^2 - ab - 21b^2$.

2. $24x + 9$; 20.

3. $-2a^3b^2 + 6ab^2$, пятая степень.

4. а) $x = -4\frac{1}{5}$; б) x – любое число, кроме нуля.

5. а) $3xy(x + 2 - 5xy)$; б) $(y + 2)(x + 7)$.

6. Доказано.

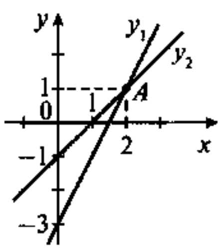
7. 360 км; $51\frac{3}{7}$ км/ч.

В

8. 60.

9. а) $2a(2a^2 - 3b)(a - 2)$; б) $(a - 2b)(a - 4b)$.

10. $x = 2$.



11. 7.

С

12. В данном выражении выполним все указанные действия: $(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - a(a - 2)(a + 2) + 8 = a(a^2 + 2a + 4) - 2(a^2 + 2a + 4) - a(a^2 + 2a - 2a - 4) + 8 = a^3 + 2a^2 + 4a - 2a^2 - 4a - 8 - a(a^2 - 4) + 8 = a^3 - a^3 + 4a = 4a$.

(*Ответ*: $4a$.)

13. В левой части уравнения $(x^2 - 3x)^2 + 2(x^2 - 3x) = 0$ вынесем общий множитель $x^2 + 3x$ за скобки. Получаем $(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, т. е. $x^2 - 3x = 0$ или $x^2 - 3x + 2 = 0$. Решим эти уравнения разложением на множители.

а) Вынесем общий множитель x за скобки: $x(x - 3) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем $x = 0$ или $x - 3 = 0$ (корень этого уравнения $x = 3$).

б) Представим член $-3x$ в виде $-3x = -x - 2x$ и используем группировку членов. Получаем $x^2 - x - 2x + 2 = 0$, или $(x^2 - x) + (-2x + 2) = 0$, или $x(x - 1) - 2(x - 1) = 0$, или $(x - 1)(x - 2) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x - 1 = 0$ (корень $x = 1$) и $x - 2 = 0$ (корень $x = 2$).

Итак, данное уравнение имеет четыре корня.

(*Ответ:* $x = 0$, $x = 3$, $x = 1$, $x = 2$.)

14. Сначала решим линейное уравнение $6(x - 3) = 2(x + 1)$. Раскроем скобки и получим $6x - 18 = 2x + 2$, или $6x - 2x = 18 + 2$, или $4x = 20$, откуда $x = 5$.

По условию это число является и корнем второго уравнения $2x^2 + 3ax - 1 = 0$. Подставим корень в это уравнение и получим $2 \cdot 5^2 + 3a \cdot 5 - 1 = 0$, или $50 + 15a - 1 = 0$, или $15a = -49$, откуда $a = -\frac{49}{15} = -3\frac{4}{15}$.

При таком значении a два данных уравнения имеют общий корень $x = 5$.

(*Ответ:* $a = -3\frac{4}{15}$.)

Вариант 2

А

1. а) $8a^5 - 14a^4$; б) $15a^2 - 29ab - 14b^2$.

2. $-15x - 4$; -10.

3. $-3a^3b^2 + 5ab^2$, пятая степень.

4. а) $x = -6\frac{1}{5}$; б) x — любое число, кроме нуля.

5. а) $4xy(y - 2 + 3xy)$; б) $(x + 5)(y + 3)$.

6. Доказано.

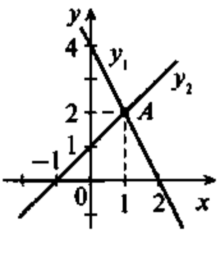
7. 200 км; $33\frac{1}{3}$ км/ч.

B

8. 18.

9. а) $a(3a^2 - 2b)(3a - 5)$; б) $(a - 2b)(a - 5b)$.

10. $x = 1$.



11. 5.

C

12. В данном выражении выполним все указанные действия: $(a + 3)(a^2 - 3a + 9) - a(a - 1)(a + 1) - 27 = a(a^2 - 3a + 9) +$

$+ 3(a^2 - 3a + 9) - a(a^2 + a - a - 1) - 27 = a^3 - 3a^2 + 9a + 3a^2 - 9a + 27 - a(a^2 - 1) - 27 = a^3 - a^3 + a = a.$

(*Ответ:* a.)

13. В левой части уравнения $(x^2 + 5x)^2 + 6(x^2 + 5x) = 0$ вынесем общий множитель $x^2 + 5x$ за скобки. Получаем $(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 6) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, т. е. $x^2 + 5x = 0$ или $x^2 + 5x + 6 = 0$. Решим эти уравнения разложением на множители.

а) Вынесем общий множитель x за скобки: $x(x + 5) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем $x = 0$ или $x + 5 = 0$ (корень этого уравнения $x = -5$).

б) Представим член $5x$ в виде $5x = 2x + 3x$ и используем группировку членов. Получаем $x^2 + 2x + 3x + 6 = 0$, или $(x^2 + 2x) + (3x + 6) = 0$, или $x(x + 2) + 3(x + 2) = 0$, или $(x + 2)(x + 3) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x + 2 = 0$ (корень $x = -2$) и $x + 3 = 0$ (корень $x = -3$).

Итак, данное уравнение имеет четыре корня.

(*Ответ:* $x = 0$, $x = -5$, $x = -2$, $x = -3$.)

14. Сначала решим линейное уравнение $5(x - 4) = 3(x - 2)$. Раскроем скобки и получим $5x - 20 = 3x - 6$, или $5x - 3x = 20 - 6$, или $2x = 14$, откуда $x = 7$.

По условию это число является и корнем второго уравнения $3x^2 + 2ax - 5 = 0$. Подставим корень в это уравнение и получим $3 \cdot 7^2 + 2a \cdot 7 - 5 = 0$, или $147 + 14a - 5 = 0$, или $14a = -142$, откуда $a = -\frac{142}{14} = -10\frac{1}{7}$.

При таком значении a два данных уравнения имеют общий корень $x = 7$.

Ответ: $a = -10\frac{1}{7}$.

V. Подведение итогов уроков

Глава V
ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

§ 12. КВАДРАТ СУММЫ И КВАДРАТ РАЗНОСТИ

Урок 62. Возведение в квадрат суммы и разности двух выражений

Цель: вывести формулы для возведения в квадрат суммы и разности выражений.

Планируемые результаты: научиться пользоваться формулами квадрата суммы и квадрата разности.

Тип урока: урок проблемного изложения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

При перемножении многочленов и приведении их к стандартному виду, а также при решении многих других задач очень полезными оказываются *формулы сокращенного умножения.*

Прежде всего, рассмотрим формулы для возведения *в квадрат суммы* и *разности* двух выражений.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (1)

(квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения);

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (2)

(квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения).

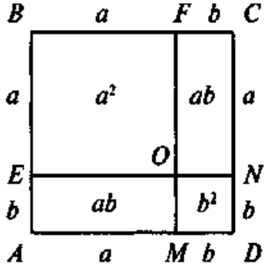
Тождество (1) называют формулой квадрата суммы, тождество (2) – формулой квадрата разности. Эти формулы позволяют возводить в квадрат сумму или разность любых двух чисел (выражений). Формулы (1) и (2) можно получить алгебраическим и геометрическим способами.

Выведем формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Алгебраический способ

По определению $A = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$. Перемножим эти многочлены: $A = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Геометрический способ



Рассмотрим квадрат *ABCD* со стороной $a + b$. Очевидно, что его площадь равна $(a + b)^2$. Теперь на расстоянии a от вершины *B* проведем прямые *EN* и *FM*, параллельные сторонам квадрата. Эти прямые разбили нашу фигуру на квадрат *BFOE* (со стороной a и площадью a^2), квадрат *OMDN* (со стороной b и площадью b^2) и два прямоугольника *AEOM* и *FONC* (со сторонами a и b и площадью ab).

Так как эти четыре фигуры полностью расположены внутри исходного квадрата, то сумма их площадей $a^2 + b^2 + 2ab$ равна площади большого квадрата $(a + b)^2$. Поэтому получаем $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Заметим, что формула квадрата суммы была получена древнегреческими математиками еще до нашей эры (более 2000 лет назад) именно геометрическим способом. Видно, что применение алгебры позволяет значительно упростить и ускорить вывод формул.

Теперь выведем формулу $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

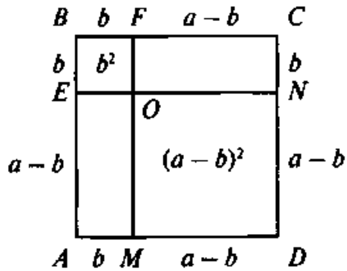
Алгебраический способ

По определению $A = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$. Перемножим эти многочлены: $A = (a - b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2$.

Приведем подобные члены и получим $A = a^2 - 2ab + b^2$.

Заметим, что эту формулу можно вывести и из формулы (1), заменив операцию вычитания операцией сложения: $a - b = a + (-b)$. Тогда получаем $(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Геометрический способ



Будем считать, что $a > b$. Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной a. Очевидно, что его площадь равна a^2.

Теперь на расстоянии b от вершины B проведем прямые EN и FM, параллельные сторонам квадрата. Эти прямые разбили фигуру на квадрат $BFOE$ (со стороной b и площадью b^2), квадрат $OMDN$ (со стороной $a - b$ и площадью $(a - b)^2$) и два прямоугольника $ABFM$ и $BCNE$ (со сторонами a и b и площадью ab).

Площадь квадрата $OMDN$ (равную $(a - b)^2$) найдем, если из площади квадрата $ABCD$ (равной a^2) вычтем площади двух прямоугольников $ABFM$ и $BCNE$ (каждая из которых равна ab) и добавим площадь квадрата $BFOE$ (равную b^2). В итоге получаем $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Рассмотрим примеры применения формул квадрата суммы и квадрата разности.

Пример 1

Возведем в квадрат число 52.

Запишем число 52 в виде $52 = 50 + 2$ и используем формулу квадрата суммы: $52^2 = (50 + 2)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2500 + 200 + 4 = 2704$.

Пример 2

Возведем в квадрат число 49.

Запишем число 49 в виде $49 = 50 - 1$ и используем формулу квадрата разности: $49^2 = (50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$.

Пример 3

Возведем в квадрат сумму $5a + 3b$. По формуле квадрата суммы получаем $(5a + 3b)^2 = (5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 = 25a^2 + 30ab + 9b^2$.

Пример 4

Возведем в квадрат разность $7a - 2b$. По формуле квадрата разности имеем $(7a - 2b)^2 = (7a)^2 - 2 \cdot 7a \cdot 2b + (2b)^2 = 49a^2 - 28ab + 4b^2$.

Пример 5

Докажем, что выражение $A = (a-4)^2 - 2(a+8)(a-4) + (a+8)^2$ не зависит от a, и найдем величину A.

Запишем выражение A в виде $A = (a-4)^2 - 2(a-4)(a+8) + (a+8)^2$.

Очевидно, что выражение A является квадратом разности чисел $(a-4)$ и $(a+8)$. Получаем $A = ((a-4)-(a+8))^2 = (a-4-a-8)^2 = (-12)^2 = 144$.

Действительно, выражение A не зависит от a; $A = 144$.

Пример 6

Упростим выражение $(4a+3b)^2 - 2a(8a+12b) - (2b)^2$.

Используем формулу квадрата суммы, раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем $(4a+3b)^2 - 2a(8a+12b) - (2b)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 3b + (3b)^2 - 2a \cdot 8a - 2a \cdot 12b - 4b^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2 - 16a^2 - 24ab - 4b^2 = 5b^2$.

III. Задания на уроке

№ 799 (а, г, д), 803 (б, в), 806 (а), 810 (в, г), 812 (а, б), 814 (а, в), 818 (в, г), 823 (в), 824 (б).

IV. Контрольные вопросы

- Сформулируйте словами, как найти квадрат суммы, и запишите соответствующую формулу.
- Выведите формулу квадрата суммы алгебраическим способом, а затем геометрическим способом.
- Сформулируйте словами, как найти квадрат разности, и запишите соответствующую формулу.
- Выведите формулу квадрата разности алгебраическим способом, а затем геометрическим способом.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 799 (б, в, е), 803 (а, е), 806 (б), 810 (д, е), 812 (г, д), 814 (б, г), 818 (а, б), 823 (г), 824 (г).

Уроки 63, 64. Возведение в куб суммы и разности двух выражений

Цель: вывести формулы для возведения в куб суммы или разности чисел (выражений).

Планируемые результаты: научиться пользоваться формулами куба суммы и куба разности.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Сформулируйте словами, как найти квадрат суммы, и запишите соответствующую формулу.

2. Представьте в виде многочлена:

а) $(2a + 7b)^2$; б) $(3a^2 - 4b^3)^2$.

3. Упростите выражение $(3a - 2b)^2 - 3a(3a - 4b)$ и найдите его значение при $b = \frac{1}{2}$.

4. Найдите значение выражения

$(a - 3)^2 + (6 - a)^2 + 2(a - 3)(6 - a)$.

Вариант 2

1. Сформулируйте словами, как найти квадрат суммы, и запишите соответствующую формулу.

2. Представьте в виде многочлена:

а) $(3a + 5b)^2$; б) $(2a^2 - 6b^3)^2$.

3. Упростите выражение $(2a - 3b)^2 - 3b(3b - 4a)$ и найдите его значение при $a = -\frac{1}{2}$.

4. Найдите значение выражения

$(a - 2)^2 + (5 + a)^2 - 2(a - 2)(5 + a)$.

III. Работа по теме уроков

Приведем еще две формулы сокращенного умножения, позволяющие возводить *в куб сумму или разность* двух чисел (выражений).

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \qquad (1)$$

Тождество (1) называют *формулой куба суммы*. В соответствии с ней куб суммы двух чисел (выражений) равен кубу первого числа (выражения) плюс утроенное произведение квадрата первого числа (выражения) и второго плюс утроенное произведение первого числа (выражения) и квадрата второго плюс куб второго числа (выражения).

Получим формулу (1) алгебраическим способом.

Используя свойства степеней и формулу квадрата суммы, получаем $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + (2a^2b + a^2b) + (ab^2 + 2ab^2) + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Заметим, что формула (1) может быть получена и геометрическим способом. Для этого необходимо рассмотреть объемы параллелепипедов.

Формула куба разности имеет аналогичный вид:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \qquad (2)$$

В соответствии с формулой (2) куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго минус куб второго выражения.

Формулу (2) можно вывести аналогично формуле (1): $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 + (-2a^2b - a^2b) + (ab^2 + 2ab^2) - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Заметим, что формула (2) может быть непосредственно получена из формулы (1): $(a - b)^3 = (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2 \cdot (-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Пример 1

Возведем в куб число 101.

Используя формулу (1), получаем $101^3 = (100 + 1)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 + 1^3 = 1\,000\,000 + 30\,000 + 300 + 1 = 1\,030\,301$.

Пример 2

Возведем в куб число 99.

Используя формулу (2), получаем $99^3 = (100 - 1)^3 = 100^3 - 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 - 1^3 = 1\,000\,000 - 30\,000 + 300 - 1 = 970\,299$.

Пример 3

Возведем в куб двучлен $2a + 3b$.

Используя формулу (1), получаем $(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot (3b)^2 + (3b)^3 = 8a^3 + 3 \cdot 4a^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot 9b^2 + 27b^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$.

Пример 4

Возведем в куб двучлен $a^3 - 2b^2$.

Используя формулу (2), получаем $(a^3 - 2b^2)^3 = (a^3)^3 - 3 \cdot (a^3)^2 \cdot 2b^2 + 3 \cdot a^3 \cdot (2b^2)^2 - (2b^2)^3 = a^9 - 3a^6 \cdot 2b^2 + 3a^3 \cdot 4b^4 - 8b^6 = a^9 - 6a^6b^2 + 12a^3b^4 - 8b^6$.

Пример 5

Упростим выражение $(2a - b)^3 + b(b^2 + 12a^2)$.

Используя формулу (2) и раскрыв скобки, получаем $(2a - b)^3 + b(b^2 + 12a^2) = (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot b + 3 \cdot 2a \cdot b^2 - b^3 + b^3 + 12a^2b = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3 + b^3 + 12a^2b = 8a^3 + 6ab^2$.

Заметим, что формулы $(a + b)^2$ и $(a + b)^3$, $(a - b)^2$ и $(a - b)^3$ являются частными случаями формул $(a + b)^n$ и $(a - b)^n$ для $n = 2$

и $n = 3$ (бином Ньютона). Поэтому существуют определенные закономерности в этих формулах. Приведем еще раз формулы $(a + b)^n$ и $(a - b)^n$ для $n = 1, 2, 3$.

n	$(a + b)^n$	$(a - b)^n$
1	$a + b$	$a - b$
2	$a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2$
3	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Отметим закономерности этих формул:

1. При возведении суммы или разности двух чисел в n-ю степень получается однородный многочлен n-й степени, т. е. многочлен, состоящий из одночленов только n-й степени. Количество членов в многочлене равно $n + 1$. Например, при возведении $a + b$ в квадрат получается однородный многочлен второй степени, состоящий из трех членов.

2. Получающийся однородный многочлен начинается с a^n. В следующем члене степень a уменьшается на единицу, но появляется множитель b. В следующем члене опять степень a уменьшается на единицу, степень b увеличивается на единицу и так до тех пор, пока степень b не будет равна n.

3. При такой записи получающегося многочлена крайние члены имеют коэффициенты 1, остальные члены – коэффициенты n (только при $n = 2, 3$). Например, при возведении в куб суммы $a + b$ коэффициенты последовательно равны 1, 3, 3, 1.

4. При возведении в n-ю степень суммы $a + b$ все коэффициенты имеют знак «плюс». При возведении разности $a - b$ знаки коэффициентов чередуются, начиная со знака «плюс».

Например, при возведении разности $a - b$ в куб коэффициенты последовательно равны 1, –3, 3, –1.

5. Все сказанное справедливо только при $n = 1, 2, 3$. Начиная с $n = 4$ закономерности становятся сложнее.

IV. Задания на уроках и на дом

1. Используя соответствующие формулы, найдите:

а) 31^3; в) 52^3;
б) 28^3; г) 49^3.

(*Ответы:* а) 29 791; б) 21 952; в) 140 608; г) 117 649.)

2. Вычислите:

а) $(x + 1)^3$; д) $(2x - 1)^3$; и) $(2a + 3b)^3$;
б) $(a - 1)^3$; е) $(3a + 2)^3$; к) $(3a - 2b)^3$;
в) $(x + 3)^3$; ж) $(2b + 3)^3$; л) $(-a - b)^3$;
г) $(b - 2)^3$; з) $(3c - 1)^3$; м) $(-2a + b)^3$.

(*Ответы*:

а) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;
б) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$;
в) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$;
г) $b^3 - 6b^2 + 12b - 8$;
д) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$;
е) $27a^3 + 54a^2 + 36a + 8$;
ж) $8b^3 + 36b^2 + 54b + 27$;
з) $27c^3 - 27c^2 + 9c - 1$;
и) $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$;
к) $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$;
л) $-a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$;
м) $-8a^3 + 12a^2b - 6ab^2 + b^3$.)

3. Решите уравнение:
а) $(x + 1)^3 - x^2(x + 3) + 2 = 0$;
б) $(x - 2)^3 - x^2(x - 6) - 4 = 0$;
в) $(2x + 1)^3 - 4x^2(2x + 3) - 7 = 0$;
г) $(2x - 3)^3 - 4x^2(2x - 9) = 0$;
д) $(1 - 2x)^3 - 12x^2 + 8x^3 = 0$;
е) $(-x - 1)^3 + x^3 + 3x^2 = 0$.

(*Ответы:* а) $x = -1$; б) $x = 1$; в) $x = 1$; г) $x = \frac{1}{2}$; д) $x = \frac{1}{6}$; е) $x = -\frac{1}{3}$.)

V. Контрольные вопросы

– Сформулируйте словами, как найти куб суммы, и запишите соответствующую формулу.
– Выведите формулу куба суммы алгебраическим способом.
– Сформулируйте словами, как найти куб разности, и запишите соответствующую формулу.
– Выведите формулу куба разности алгебраическим способом.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 65, 66. Разложение на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности

Цель: научить раскладывать выражения на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности.

Планируемые результаты: научиться раскладывать выражения на множители, выделять полный квадрат суммы или разности.

Тип уроков: уроки изучения нового материала.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите формулу куба суммы двух чисел (выражений).
2. Преобразуйте в многочлен выражение $(a - 2)^3$.
3. Упростите выражение $(x + 1)^3 + (x - 1)^3$.

Вариант 2

1. Напишите формулу куба разности двух чисел (выражений).
2. Преобразуйте в многочлен выражение $(a + 3)^3$.
3. Упростите выражение $(x + 1)^3 - (x - 1)^3$.

III. Работа по теме уроков

Формулы квадрата суммы и квадрата разности используют для разложения на множители многочленов вида $a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 - 2ab + b^2$, выделения полных квадратов суммы и разности чисел, доказательства тождеств, неравенств и т. д. Запишем формулы, рассмотренные на предыдущем уроке, поменяв местами левую и правую части: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ и $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Заметим, что выражение $c^2 = c \cdot c$. Поэтому приведенные формулы можно рассматривать как разложение многочлена на множители. Представление выражения $a^2 + 2ab + b^2$ в виде $(a + b)^2$ и выражения $a^2 - 2ab + b^2$ в виде $(a - b)^2$ называют также выделением полных квадратов суммы и разности.

Пример 1

Разложим на множители многочлен $4x^2 + 12x + 9$. Первое слагаемое $4x^2$ представляет собой квадрат выражения $2x$, третье – квадрат числа 3. Легко проверить, что второе слагаемое – удвоенное произведение выражения $2x$ и числа 3, т. е. $12x = 2 \cdot 2x \cdot 3$. Тогда данный многочлен имеет вид $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$.

Пример 2

Разложим на множители выражение $9a^2 - 30ab^2 + 25b^4$. Первое слагаемое $9a^2$ является квадратом выражения $3a$, третье слагаемое $25b^4$ – квадратом выражения $5b^2$. Легко проверить, что второе слагаемое – удвоенное произведение выражений $3a$ и $5b^2$, т. е. $30ab^2 = 2 \cdot 3a \cdot 5b^2$. Тогда данный трехчлен имеет вид $9a^2 - 30ab^2 + 25b^4 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5b^2 + (5b^2)^2 = (3a - 5b^2)^2$.

Пример 3

Найдем наименьшее значение выражения $A = 2a^2 - 4a + 10$.

В данном выражении вынесем общий множитель 2 за скобки: $A = 2(a^2 - 2a + 5)$.

В выражении $a^2 - 2a + 5$ выделим полный квадрат разности: $a^2 - 2a + 5 = (a^2 - 2a + 1) + 4 = (a^2 - 2 \cdot a \cdot 1 + 1^2) + 4 = (a - 1)^2 + 4$.

Поэтому данное выражение можно записать в виде $A = 2((a - 1)^2 + 4) = 2(a - 1)^2 + 8$.

Очевидно, что слагаемое $2(a - 1)^2 \geq 0$. Выражение A будет принимать наименьшее значение, если слагаемое $2(a - 1)^2$ будет наименьщим, т. е. $2(a - 1)^2 = 0$. Уравнение выполняется, если $a - 1 = 0$, т. е. $a = 1$. Тогда наименьшее значение данного выражения $A = 2 \cdot (1 - 1)^2 + 8 = 2 \cdot 0^2 + 8 = 8$.

Пример 4

Докажем, что при всех значениях переменных a и b значение выражения $A = 2a^2 + b^2 - 2ab + 4a + 6$ больше 1.

В данное выражение A входят две переменные a и b. Представим слагаемое $2a^2$ в виде $2a^2 = a^2 + a^2$ и сгруппируем члены выражения: $A = a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + 4a + 6 = (a^2 - 2ab + b^2) + a^2 + 4a + 6$.

Выражение в скобках является квадратом разности $a - b$. Чтобы в оставшихся слагаемых выделить квадрат суммы, представим число 6 в виде суммы чисел $6 = 4 + 2$. Тогда выражение A имеет вид $A = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 + 4a + 4) + 2 = (a - b)^2 + (a + 2)^2 + 2$.

При всех значениях переменных a и b выражения $(a - b)^2 \geq 0$ и $(a + 2)^2 \geq 0$, поэтому данное выражение $A \geq 2$ и тем более $A > 1$.

IV. Задания на уроках

№ 833 (а, б), 835 (б, в), 836 (а, в), 837, 839 (а, б), 842 (а), 844 (г, д), 848 (а, в).

V. Творческие задания

1. Найдите наименьшее (или наибольшее) значение выражения. При каком(их) значении(ях) переменной(ых) оно достигается?

а) $a^2 - 4x + 7$;
б) $y^2 - 6y + 1$;
в) $6 + x - x^2$;
г) $3 - 4y - y^2$;
д) $x^2 + 2x + y^2$;
е) $x^2 - 4xy + 5y^2$;
ж) $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 5$.

(*Ответы:* а) 3 при $x = 2$; б) -8 при $y = 3$; в) $6\frac{1}{4}$ при $x = \frac{1}{2}$; г) 7 при $y = -2$; д) -1 при $x = -1$, $y = 0$; е) 0 при $x = y = 0$; ж) -8 при $x = 2$, $y = -3$.)

2. Докажите неравенство:

а) $x^2 + 4x \geq -4$;
б) $y^2 + 9 \geq 6y$;
в) $x^2 + y^2 \geq 2xy$;
г) $x^2 + 4y^2 \geq -4xy$;
д) $-x^2 + 10x < 26$;
е) $-y^2 + 8y - 16 < 5$;
ж) $x^2 + 4x + y^2 - 8y + 25 > 3$;
з) $2x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x > -2$;
и) $x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y > -5$.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 833 (в, д), 835 (а, д), 836 (б, г), 838, 839 (г, д), 842 (б), 844 (а, б), 848 (б, г).

§ 13. РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ. СУММА И РАЗНОСТЬ КУБОВ

Уроки 67, 68. Умножение разности двух выражений на их сумму

Цель: ознакомить с формулой для нахождения разности квадратов и ее применением.

Планируемые результаты: освоить умножение разности двух выражений на их сумму.

Тип уроков: урок-исследование, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Преобразуйте в квадрат двучлена трехчлен:

а) $x^4 - 8x^2 + 16$; б) $a^4 + 6a^2b + 9b^2$.

2. Докажите неравенство $9x^2 + 4y^2 > 12xy - 1$.

Вариант 2

1. Преобразуйте в квадрат двучлена трехчлен:

а) $y^6 + 6y^3 + 9$; б) $a^4 - 8a^2b + 16b^2$.

2. Докажите неравенство $9y^2 + 16x^2 > 24xy - 2$.

III. Работа по теме урока

Приведем еще одну формулу сокращенного умножения:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2, \quad (1)$$

которая позволяет быстро умножать разность и сумму одних и тех же чисел a и b.

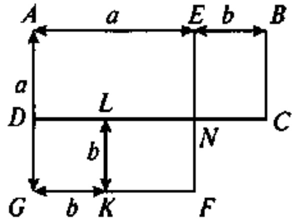
Выведем эту формулу.

Алгебраический способ

Умножим разность чисел $a - b$ на их сумму $a + b$. Получаем $(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Геометрический способ

Рассмотрим фигуру, изображенную на рисунке.



Стороны прямоугольника $ABCD$ равны: $AB = a + b$ и $AD = a - b$ (для определенности считаем, что a, $b > 0$ и $a > b$), и его площадь $S = AD \cdot AB = (a - b)(a + b)$. Этот прямоугольник состоит из прямоугольников $AEND$ и $EBCN$. Прямоугольник $EBCN$ равен прямоугольнику $KLNF$. Поэтому площадь S равна площади фигуры $AENFKLD$, которая равна разности площадей квадратов $AEFG$ (со стороной a) и $DLKG$ (со стороной b), т. е. $S = a^2 - b^2$. Приравняв два выражения для площади S, получаем равенство $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

В соответствии с тождеством (1) произведение разности чисел (выражений) и их суммы равно разности квадратов этих чисел (выражений). Тождество (1) широко используется при алгебраических преобразованиях выражений.

Пример 1

Перемножим числа 47 и 53, записав их в виде разности и суммы двух чисел: $47 = 50 - 3$ и $53 = 50 + 3$. Используя формулу (1), получаем $47 \cdot 53 = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$.

Пример 2

Сравним числа $A = 141 \cdot 144 \cdot 148 \cdot 151$ и $B = 146^4$.

Получаем $141 = 146 - 5$, $144 = 146 - 2$, $148 = 146 + 2$, $151 = 146 + 5$.

Тогда число A имеет следующий вид: $A = (146 - 5)(146 - 2)(146 + 2)(146 + 5)$.

Изменим порядок умножения сомножителей, перемножив сначала два крайних числа, а затем два средних. Получаем $A = (146 - 5)(146 + 5) \cdot (146 - 2)(146 + 2)$.

Используя формулу (1), имеем $A = (146^2 - 5^2)(146^2 - 2^2)$.

Очевидно, что в таком произведении каждый множитель меньше числа 146^2, т. е. $146^2 - 5^2 < 146^2$ и $146^2 - 2^2 < 146^2$. Поэтому произведение меньше $146^2 \cdot 146^2 = 146^{2+2} = 146^4 = B$. Таким образом, число A меньше числа B, т. е. $A < B$.

Пример 3

Перемножим выражения $4a - 5b$ и $4a + 5b$.

Используя формулу (1) и правила действий со степенями, получаем $(4a - 5b)(4a + 5b) = (4a)^2 - (5b)^2 = 16a^2 - 25b^2$.

Пример 4

Представим в виде многочлена выражение $(3a^3 - 2b^2)(3a^3 + 2b^2)$.

Используя формулу (1), получаем $(3a^3 - 2b^2)(3a^3 + 2b^2) = (3a^3)^2 - (2b^2)^2 = 9a^6 - 4b^4$.

Пример 5

Перемножим выражения $-6a - 5b$ и $6a - 5b$.

В первом выражении $-6a - 5b$ вынесем за скобки число (-1) и получим $(-6a - 5b)(6a - 5b) = (-1)(6a + 5b)(6a - 5b) = -((6a)^2 - (5b)^2) = -(36a^2 - 25b^2) = 25b^2 - 36a^2$.

Заметим, что преобразование можно выполнить и сразу: $(-6a - 5b)(6a - 5b) = (-5b - 6a)(-5b + 6a) = (-5b)^2 - (6a)^2 = 25b^2 - 36a^2$.

Пример 6

Упростим выражение $(6a - 7b)(6a + 7b) - (3a + 4b)(12a - 17b) - 3ab$.

Раскроем скобки, а для первого произведения используем формулу (1). Получаем $(6a - 7b)(6a + 7b) - (3a + 4b)(12a - 17b) - 3ab = (6a)^2 - (7b)^2 - (36a^2 - 51ab + 48ab - 68b^2) - 3ab = 36a^2 - 49b^2 - (36a^2 - 3ab - 68b^2) - 3ab = 36a^2 - 49b^2 - 36a^2 + 3ab + 68b^2 - 3ab = 19b^2$.

IV. Задания на уроках

№ 854 (в, д), 855 (б, г), 857 (г), 858 (а), 859 (в, г), 861 (а, г, ж), 862 (в), 867 (б), 869 (а, д), 873 (а, д).

V. Контрольные вопросы

- Сформулируйте словами, как найти произведение разности и суммы двух выражений, и запишите соответствующую формулу.
- Выведите формулу произведения разности и суммы двух выражений алгебраическим способом.
- Выведите формулу произведения разности и суммы двух выражений геометрическим способом.

VI. Творческие задания

1. Выполните действия:

а) $97 \cdot 103$;

б) $95 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 105$;

в) $98 \cdot 100 \cdot 102$;

г) $(3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)$;

д) $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)$;

е) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$;

ж) $(b + c)(b^4 + c^4)(b^2 + c^2)(b - c)$;

з) $(a + b)(a^2 + b^2)(a - b) + (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2$.

(*Ответы:* а) 9991; б) 99 660 025; в) 999 600; г) $3^8 - 1$; д) $2^{16} - 1$ (умножить выражение на $2 - 1 = 1$); е) $a^8 - b^8$; ж) $b^8 - c^8$ (изменить порядок умножения); з) $2a^4$.)

2. Сравните числа:

а) $43 \cdot 47$ и 45^2;

б) $81 \cdot 87$ и 84^2;

в) $164 \cdot 168$ и 167^2;

г) $153 \cdot 155 \cdot 157$ и 155^3;

д) $232 \cdot 233 \cdot 236$ и 234^3;

е) $132 \cdot 138 \cdot 254 \cdot 258$ и $(135 \cdot 256)^2$.

(*Ответ:* первые числа меньше, чем вторые.)

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 854 (б, е), 855 (в, д), 857 (д), 858 (б), 859 (ж, з), 861 (б, д, з), 862 (г), 867 (д), 869 (б, е), 873 (б, е).

Уроки 69, 70. Разложение разности квадратов на множители

Цель: научить раскладывать выражения на множители с помощью формул разности квадратов.

Планируемые результаты: научиться раскладывать выражения на множители.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите значение произведения:

а) $97 \cdot 103$; б) $17{,}7 \cdot 18{,}3$;

2. Выполните умножение:

а) $(3a - 4b)(3a + 4b)$; б) $(-6a - 5b)(6a - 5b)$.

3. Упростите выражение $(2a - 3b)(2a + 3b) + 9b(b + 1)$.

Вариант 2

1. Найдите значение произведения:

а) $104 \cdot 96$; б) $15{,}7 \cdot 16{,}3$.

2. Выполните умножение:

а) $(2b - 3a)(2b + 3a)$; б) $(-4a - 5b)(4a - 5b)$.

3. Упростите выражение $(3a - 4b)(3a + 4b) - 9a(a - 1)$.

III. Работа по теме уроков

В равенстве $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ поменяем местами части и получим тождество $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Разность квадратов двух чисел (выражений) равна произведению разности этих чисел (выражений) и их суммы. Такое тождество называют *формулой разности квадратов*. Ее используют для разложения на множители разности квадратов чисел или выражений.

Пример 1

Докажем, что число $47^4 - 32^2$ составное.

Используем формулу разности квадратов и получаем $47^4 - 32^2 = (47^2)^2 - 32^2 = (47^2 - 32)(47^2 + 32)$.

Видно, что у данного числа есть множители $47^2 - 32$ и $47^2 + 32$, поэтому такое число по определению является составным.

Пример 2

Докажем, что число $16^4 - 231^2$ кратно 25.

Применим формулу разности квадратов и получим $16^4 - 231^2 = (16^2)^2 - 231^2 = 256^2 - 231^2 = (256 - 231)(256 + 231) = 25 \cdot 487$.

Так как данное число имеет делитель 25, то оно кратно 25.

Пример 3

Сократим дробь $\dfrac{53^2 - 32^2}{61^2 - 44^2}$.

Используя формулу разности квадратов, разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Получаем

$$\frac{53^2 - 32^2}{61^2 - 44^2} = \frac{(53-32)(53+32)}{(61-44)(61+44)} = \frac{21 \cdot 85}{17 \cdot 105} = \frac{21 \cdot 17 \cdot 5}{17 \cdot 21 \cdot 5} = 1.$$

Пример 4

Найдем значение выражения $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$.

В приведенную сумму входят сто чисел. Сгруппируем их последовательно попарно и используем формулу разности квадратов. Получаем $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2 = (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + \ldots + (2^2 - 1^2) = (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \ldots + (2 - 1)(2 + 1) = 1 \cdot 199 + 1 \cdot 195 + \ldots + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 3 = 199 + 195 + \ldots + 7 + 3$.

После группировки членов получилось 50 выражений, поэтому надо сложить 50 чисел. Каждое следующее число на 4 меньше предыдущего (т. е. числа образуют арифметическую прогрессию).

Чтобы найти сумму чисел, также сгруппируем их попарно: первое с последним, второе с предпоследним и т. д. Получаем $199 + 195 + \ldots + 7 + 3 = (199 + 3) + (195 + 7) + \ldots = 202 + \ldots + 202 = 202 \cdot 25 = 5050$.

Заметим, что при попарной группировке 50 чисел получилось 25 скобок и в результате 25 одинаковых чисел 202.

Пример 5

Разложим на множители выражение $25x^4 - 16y^2$.

Представим этот двучлен в виде разности квадратов и используем формулу разности квадратов: $25x^4 - 16y^2 = (5x^2)^2 - (4y)^2 = (5x^2 - 4y)(5x^2 + 4y)$.

Пример 6

Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 + 4x + 3$.

Дополним это выражение до квадрата суммы: $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x^2 + 4x + 4) - 1 = (x + 2)^2 - 1^2$.

Затем применим формулу разности квадратов: $(x + 2)^2 - 1^2 = (x + 2 - 1)(x + 2 + 1) = (x + 1)(x + 3)$.

Таким образом, получили $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$.

Заметим, что ранее для разложения квадратных трехчленов мы использовали способ группировки членов. Представим член $4x$ в виде $4x = x + 3x$. Тогда получаем $x^2 + 4x + 3 = x^2 + x + 3x + 3 = (x^2 + x) + (3x + 3) = x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x + 3)$.

Пример 7

Разложим на множители двучлен $n^4 + 4$.

Дополним это выражение до квадрата суммы. Для этого прибавим и вычтем $4n^2$ и используем формулу разности квадратов. Получаем $n^4 + 4 = n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.

IV. Задания на уроках

№ 883 (д, и), 884 (а—в), 887 (в, г), 890 (г, д), 896 (а, в), 897 (б, в), 898 (а).

V. Творческие задания

1. Разложите на множители выражение:

а) $x^2 + 6x + 8$; г) $-x^2 + 10x - 24$;
б) $8 - 2x - x^2$; д) $4x^4 + 1$;
в) $x^2 + 14x + 48$; е) $x^4 + x^2 + 1$.

(*Ответы:* а) $(x + 2)(x + 4)$; б) $(x + 4)(2 - x)$; в) $(x + 6)(x + 8)$; г) $(x - 4)(6 - x)$; д) $(2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$ (добавить и вычесть $4x^2$); е) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ (добавить и вычесть x^2).)

2. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

а) $(3n^2 + 2)^2 - 4^2$ кратно 3;

б) $(5n + 1)^2 - 9^2$ кратно 5;
в) $(4n + 1)^2 - (2n + 5)^2$ кратно 6;
г) $(3n + 4)^2 - (4n + 3)^2$ кратно 7.

3. Сократите алгебраическую дробь:

а) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$; в) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$; д) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-16}$;

б) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; г) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$; е) $\frac{x^2+10x+24}{x^2-36}$.

(*Ответы:* а) $\frac{x+2}{x-2}$; б) $\frac{x-1}{x+1}$; в) $\frac{x-3}{x+2}$; г) $\frac{x-2}{x+3}$; д) $\frac{x-2}{x+4}$; е) $\frac{x+4}{x-6}$.)

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 883 (в, к), 884 (г–е), 887 (а, б), 890 (з, и), 896 (б, г), 897 (а, г), 898 (б).

Уроки 71, 72. Разложение на множители суммы и разности кубов

Цель: рассмотреть формулы суммы и разности кубов.

Планируемые результаты: научиться раскладывать выражения на множители с помощью формул суммы и разности кубов.

Тип уроков: урок-исследование, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

а) $156^2 - 56^2$; б) $\frac{49^2-28^2}{67^2-46^2}$.

2. Разложите на множители многочлен:

а) $a^4 - 16$; б) $\frac{1}{9}b^4 - 4a^2$.

3. Решите уравнение $\frac{1}{16}x^4 - 1 = 0$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

а) $155^2 - 45^2$; б) $\dfrac{87^2 - 64^2}{75^2 - 52^2}$.

2. Разложите на множители многочлен:

а) $b^4 - 81$; б) $\dfrac{1}{25}a^4 - 9b^2$.

3. Решите уравнение $\dfrac{1}{81}y^4 - 1 = 0$.

III. Работа по теме уроков

Приведем еще две формулы сокращенного умножения.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2). \qquad (1)$$

Это тождество называют *формулой суммы кубов*. Заметим, что выражение $a^2 - ab + b^2$ называют ***неполным квадратом разности*** a и b (отличается от полного квадрата разности $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ тем, что вместо удвоенного произведения чисел a и b стоит просто их произведение).

В соответствии с формулой (1) сумма кубов двух чисел (выражений a и b) равна произведению суммы этих чисел (выражений a и b) и неполного квадрата их разности ($a^2 - ab + b^2$).

Выведем формулу (1) алгебраическим способом, преобразовав правую часть в левую.

Умножим два многочлена и получаем $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$.

Заметим, что формулу (1) можно получить и геометрическим способом, рассмотрев объемы параллелепипедов.

Формула разности кубов имеет аналогичный вид:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \qquad (2)$$

Разность кубов двух чисел (выражений a и b) равна произведению разности этих чисел (выражений a и b) и неполного квадрата их суммы ($a^2 + ab + b^2$).

Формулу (2) можно вывести аналогично формуле (1), умножив многочлены: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.

Формулу (2) можно получить непосредственно из формулы (1): $a^3 - b^3 = a^2 + (-b^3) = (a + (-b))(a^2 - a \cdot (-b) + (-b)^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Пример 1

Докажем, что выражение $123^3 + 27^3$ кратно 150.

Используя формулу (1), получим $123^3 + 27^3 = (123 + 27) \times (123^2 - 123 \cdot 27 + 27^2) = 150 \cdot (123^2 - 123 \cdot 27 + 27^2)$. Видно, что данное выражение без остатка делится на 150.

Пример 2

Вычислим значение выражения $\frac{117^3 - 23^3}{94} + 117 \cdot 23$ без калькулятора.

Используя формулу (2) и формулу квадрата суммы, получаем $\frac{117^3 - 23^3}{94} + 117 \cdot 23 = \frac{(117 - 23)(117^2 + 117 \cdot 23 + 23^2)}{94} + 117 \cdot 23 = \frac{94 \cdot (117^2 + 117 \cdot 23 + 23^2)}{94} + 117 \cdot 23 = 117^2 + 117 \cdot 23 + 23^2 + 117 \times \times 23 = 117^2 + 2 \cdot 117 \cdot 23 + 23^2 = (117 + 23)^2 = 140^2 = 19\,600.$

Пример 3

Разложим на множители двучлен $8m^3 + n^3$.

Применим формулу (1) и получим $8m^3 + n^3 = (2m)^3 + n^3 = (2m + n) \cdot ((2m)^2 - 2m \cdot n + n^2) = (2m + n)(4m^2 - 2mn + n^2)$.

Пример 4

Разложим на множители двучлен $64a^3 - 27b^6$.

Представим величины $64a^3$ и $27b^6$ в виде кубов величин $4a$ и $3b^2$. Используя формулу разности кубов, получаем $64a^3 - 27b^6 = (4a)^3 - (3b^2)^3 = (4a - 3b^2)((4a)^2 + 4a \cdot 3b^2 + (3b^2)^2) = (4a - 3b^2) \times \times (16a^2 + 12ab^2 + 9b^4)$.

Пример 5

Докажем, что при всех натуральных n значение выражения $(3n + 2)^3 + (4n + 5)^3$ кратно 7.

Применим формулу (1) и получим $(3n + 2)^3 + (4n + 5)^3 = ((3n + 2) + (4n + 5)) \cdot ((3n + 2)^2 - (3n + 2)(4n + 5) + (4n + 5)^2) = (7n + 7) \cdot ((3n + 2)^2 - (3n + 2)(4n + 5) + (4n + 5)^2) = 7 \cdot (n + 1) \times \times ((3n + 2)^2 - (3n + 2)(4n + 5) + (4n + 5)^2)$.

Видно, что данное выражение имеет множитель 7, поэтому оно кратно 7.

Пример 6

Упростим выражение $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2) + (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Используя формулы (2) и (1), получим $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2) + (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (2a)^3 - b^3 + a^3 + b^3 = 8a^3 + a^3 = 9a^3$.

IV. Задания на уроках

№ 905 (а, г, д), 906 (г–е), 907 (в, г), 909 (а, д), 911 (в), 912 (д), 913 (а, б).

V. Контрольные вопросы

– Сформулируйте словами, чему равна сумма кубов, и запишите соответствующую формулу.
– Выведите формулу суммы кубов алгебраическим способом.

– Сформулируйте словами, чему равна разность кубов, и запишите соответствующую формулу.
– Выведите формулу разности кубов алгебраическим способом.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 905 (б, в, е), 906 (а–в), 907 (е), 909 (б, в), 911 (г), 912 (е), 913 (в, г).

Урок 73. Контрольная работа № 7 по теме «Квадрат суммы и разности. Разность квадратов. Сумма и разность кубов»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко, поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при выполнении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает учащимся некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 к набранным баллам добавляются дополнительно 0,5 балла, за решение задач вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (т. е. оценка «5» выставляется уже за четыре задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Возможно, несколько труднее для учеников задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен ученикам (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий). При наличии такой техники в классе на стенде (после контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов.

Контрольная работа рассчитана на один урок.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
а) $(2a-3b)^2$; б) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$.

2. Разложите на множители многочлен:
а) $4a^2-9b^2$; б) $-4x^2+8x-4$.

3. Решите уравнение $(2x-1)^2=(2x+3)(2x-3)$.

4. Докажите неравенство $4x^2+y^2>4xy-5$.

5. Сократите дробь $\dfrac{24^2-11^2}{49^2-36^2}$.

6. Разложите на множители многочлен $x^{2n+1}+2x^{n+1}+x$.

Вариант 2

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
а) $(3a+4b)^2$; б) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$.

2. Разложите на множители многочлен:
а) $9a^2-16b^2$; б) $-5x^2+10x-5$.

3. Решите уравнение $(2x+3)^2=(2x-5)(2x+5)-2$.

4. Докажите неравенство $9x^2+y^2>6xy-3$.

5. Сократите дробь $\dfrac{34^2-21^2}{69^2-56^2}$.

6. Разложите на множители многочлен $y^{2n+1}-2y^{n+1}+y$.

Вариант 3

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
а) $(4a^2-3b)^2$; б) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.

2. Разложите на множители многочлен:
а) $16b^4-25a^2$; б) $-4x^4+8x^2-4$.

3. Решите уравнение $(3x-2)^2=(2x+1)(2x-1)+5x^2-7$.

4. Докажите неравенство $4x^2+9y^2>12xy-0{,}1$.

5. Докажите, что значение выражения 17^4-253^2 кратно 4 и 9.

6. Разложите на множители многочлен $x^{2n}+6x^ny^k+9y^{2k}$.

Вариант 4

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
а) $(5a-4b^2)^2$; б) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$.

2. Разложите на множители многочлен:
а) $25a^2-9b^4$; б) $-3x^4+6x^2-3$.

3. Решите уравнение $(5x-3)^2=(4x+3)(4x-3)+9x^2+3$.

4. Докажите неравенство $25x^2+16y^2>40xy-0{,}2$.

5. Докажите, что значение выражения 16^4-232^2 кратно 4 и 6.

6. Разложите на множители многочлен $4x^{2n}-4x^ny^k+y^{2k}$.

Вариант 5

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
$(x+2)^3+(2x-1)(4x^2+2x+1)$.

2. Разложите на множители многочлен $4a^2 + 4ab^2 + b^4 - a^4$.

3. Решите уравнение $(x + 1)^3 = x^2(x + 1)$.

4. Найдите наименьшее значение выражения $a^2 + 6ab + 10b^2 - 2b + 3$. При каких значениях a и b оно достигается?

5. Вычислите: $\dfrac{53^2 - 31^2 - 43^2 + 41^2}{73^2 - 2 \cdot 73 \cdot 63 + 63^2}$.

6. Разложите на множители многочлен $x^{2n+5} - 6x^{n+5} + 9x^5$.

Вариант 6

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
$(x - 1)^3 + (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$.

2. Разложите на множители многочлен $9a^2 + 6ab^2 + b^4 - a^4$.

3. Решите уравнение $(x - 1)^3 = x^2(x - 1)$.

4. Найдите наименьшее значение выражения $a^2 - 8ab + 17b^2 + 2b + 4$. При каких значениях a и b оно достигается?

5. Вычислите: $\dfrac{67^2 - 35^2 - 57^2 + 45^2}{84^2 - 2 \cdot 84 \cdot 74 + 74^2}$.

6. Разложите на множители многочлен $y^{2n+3} - 4y^{n+3} + 4y^3$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности.

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. а) $4a^2 - 12ab + 9b^2$; б) $a^3 + 8b^3$.

2. а) $(2a - 3b)(2a + 3b)$; б) $-4(x - 1)^2$.

3. $x = 2{,}5$.

4. Доказано.

5. $\frac{7}{17}$.

6. $x(x^n + 1)^2$.

Вариант 2

1. а) $9a^2 + 24ab + 16b^2$; б) $8a^3 - b^3$.

2. а) $(3a - 4b)(3a + 4b)$; б) $-5(x - 1)^2$.

3. $x = -3$.

4. Доказано.

5. $\frac{11}{25}$.

6. $y(y^n - 1)^2$.

Вариант 3

1. а) $16a^4 - 24a^2b + 9b^2$; б) $8a^3 + 27b^3$.

2. а) $(4b^2 - 5a)(4b^2 + 5a)$; б) $-4(x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$.

3. $x = 1$.

4. Доказано.

5. Доказано.

6. $(x^n + 3y^k)^2$.

Вариант 4

1. а) $25a^4 - 40ab^2 + 16b^4$; б) $27a^3 - 8b^3$.

2. а) $(5a - 3b^2)(5a + 3b^2)$; б) $-3(x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$.

3. $x = 0{,}5$.

4. Доказано.

5. Доказано.

6. $(2x^n - y^k)^2$.

Вариант 5

1. Используя формулы куба суммы и разности кубов, получаем $(x + 2)^3 + (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 + (2x)^3 - 1^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 8x^3 - 1 = 9x^3 + 6x^2 + 12x + 7$.

(*Ответ:* $9x^3 + 6x^2 + 12x + 7$.)

2. Учтем формулы квадрата суммы и разности квадратов. Получаем $4a^2 + 4ab^2 + b^4 - a^4 = (4a^2 + 4ab^2 + b^4) - a^4 = (2a + b^2)^2 - (a^2)^2 = (2a + b^2 - a^2)(2a + b^2 + a^2)$.

(*Ответ:* $(2a + b^2 - a^2)(2a + b^2 + a^2)$.)

3. Перенесем члены уравнения в левую часть и разложим их на множители: $(x + 1)^3 = x^2(x + 1)$, или $(x + 1)^3 - x^2(x + 1) = 0$, или $(x + 1) \cdot ((x + 1)^2 - x^2) = 0$, или $(x + 1)(x + 1 - x)(x + 1 + x) = 0$, или $(x + 1)(2x + 1) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x + 1 = 0$ (корень $x = -1$) и $2x + 1 = 0$ (корень $x = -\frac{1}{2}$).

(*Ответ:* $x = -1$ и $x = -\frac{1}{2}$.)

4. Сгруппируем члены выражения и используем формулы квадрата суммы и разности. Получаем $a^2 + 6ab + 10b^2 - 2b + 3 = (a^2 + 6ab + 9b^2) + (b^2 - 2b + 1) + 2 = (a + 3b)^2 + (b - 1)^2 + 2$.

Так как квадрат любого выражения неотрицателен, то наименьшее значение данного выражения равно 2. Оно достигается при условии $a + 3b = 0$ и $b - 1 = 0$, т. е. при $b = 1$ и $a = -3$.

(*Ответ:* 2; при $a = -3$ и $b = 1$.)

5. Сгруппируем члены в числителе и используем формулы разности квадратов. В знаменателе учтем формулу квадрата разности. Получаем $\frac{53^2 - 31^2 - 43^2 + 41^2}{73^2 - 2 \cdot 73 \cdot 63 + 63^2} = \frac{(53^2 - 43^2) + (41^2 - 31^2)}{(73 - 63)^2} =$

$= \frac{96 \cdot 10 + 72 \cdot 10}{10^2} = \frac{10(96 + 72)}{10^2} = \frac{168}{10} = 16{,}8.$

(*Ответ:* 16,8.)

6. Вынесем за скобки x^5 и учтем формулу квадрата разности. Получаем $x^{2n+5} - 6x^{n+5} + 9x^5 = x^5(x^{2n} - 6x^n + 9) = x^5(x^n - 3)^2$.

(*Ответ:* $x^5(x^n - 3)^2$.)

Вариант 6

1. Используя формулы куба суммы и разности кубов, получаем $(x - 1)^3 + (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + (2x)^3 + 3^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8x^3 + 27 = 9x^3 - 3x^2 + 3x + 26$.

(*Ответ:* $9x^3 - 3x^2 + 3x + 26$.)

2. Учтем формулы квадрата суммы и разности квадратов. Получаем $9a^2 + 6ab^2 + b^4 - a^4 = (9a^2 + 6ab^2 + b^4) - a^4 = (3a + b^2)^2 - (a^2)^2 = (3a + b^2 - a^2)(3a + b^2 + a^2)$.

(*Ответ:* $(3a + b^2 - a^2)(3a + b^2 + a^2)$.)

3. Перенесем члены уравнения в левую часть и разложим их на множители: $(x - 1)^3 = x^2(x - 1)$, или $(x - 1)^3 - x^2(x - 1) = 0$, или $(x - 1)((x - 1)^2 - x^2) = 0$, или $(x - 1)(x - 1 - x)(x - 1 + x) = 0$, или $(x - 1)(2x - 1) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x - 1 = 0$ (корень $x = 1$) и $2x - 1 = 0$ (корень $x = \frac{1}{2}$).

(*Ответ:* $x = 1$ и $x = \frac{1}{2}$.)

4. Сгруппируем члены выражения и используем формулы квадрата суммы и разности. Получаем $a^2 - 8ab + 17b^2 + 2b + 4 = (a^2 - 8ab + 16b^2) + (b^2 + 2b + 1) + 3 = (a - 4b)^2 + (b + 1)^2 + 3$.

Так как квадрат любого выражения неотрицателен, то наименьшее значение данного выражения равно 3. Оно достигается при условии $a - 4b = 0$ и $b + 1 = 0$, т. е. при $b = -1$ и $a = -4$.

(*Ответ*: 3; при $a = -4$ и $b = -1$.)

5. Сгруппируем члены в числителе и используем формулы разности квадратов. В знаменателе учтем формулу квадрата разности. Получаем $\frac{67^2 - 35^2 - 57^2 + 45^2}{84^2 - 2 \cdot 84 \cdot 74 + 74^2} = \frac{(67^2 - 57^2) + (45^2 - 35^2)}{(84 - 74)^2} =$

$= \frac{124 \cdot 10 + 80 \cdot 10}{10^2} = \frac{10(124 + 80)}{10^2} = \frac{204}{10} = 20{,}4.$

(*Ответ:* 20,4.)

6. Вынесем за скобки y^5 и учтем формулу квадрата разности. Получаем $y^{2n+3} - 4y^{n+3} + 4y^3 = y^3(y^{2n} - 4y^n + 4) = y^3(y^n - 2)^2$.

(*Ответ:* $y^3(y^n - 2)^2$.)

VI. Подведение итогов урока

§ 14. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦЕЛЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Уроки 74, 75. Преобразование целого выражения в многочлен

Цели: ознакомить с понятием целого выражения; развить навыки преобразования целого выражения в многочлен.

Планируемые результаты: научиться преобразовывать целое выражение в многочлен.

Тип уроков: уроки изучения нового материала.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Работа по теме уроков

Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения (при этом возведение в натуральную степень рассматривается как умножение) и скобок, называются *целыми*. В таких выражениях возможно и использование деления на число, не равное нулю. Очевидно, что одночлены и многочлены являются целыми выражениями.

Пример 1

Целым является выражение:

а) $0{,}7x^2yz^6$, так как это одночлен;

б) $2{,}1a^3b^2 - 3{,}7xyz + 8{,}3x^2$, так как это многочлен;

в) $(3a + 2b)(x + y) - (2a^2 + x)(b + 2y)$, так как в данное выражение входят произведения многочленов $3a + 2b$ и $x + y$, $2a^2 + x$ и $b + 2y$ (как известно, такое произведение также является многочленом) и разность этих произведений (разность многочленов также будет многочленом);

г) $(2a^2 + 3bc)^3$, так как натуральная степень многочлена также является многочленом;

д) $\frac{2a(3a+4b)}{5}$, так как деление на число 5 можно заменить умножением на число $\frac{1}{5}$. Такое произведение является многочленом.

Пример 2

Не является целым выражение:

а) $2a + \frac{5}{a-3}$, так как делится на выражение $a - 3$ с переменной;

б) $\frac{3a}{(a+1)^2}$, так как его можно записать в виде $\frac{3a}{a^2+2a+1}$ и оно также делится на выражение $a^2 + 2a + 1$ с переменной;

в) $\frac{2a^2+3b}{3b^2-5ab}$, так как делится на выражение $3b^2 - 5ab$ с переменными.

Любое *целое выражение* путем преобразований можно представить *в виде многочлена.*

Пример 3

Представим в виде многочлена выражение $(x - 2)(x + 2) - (x + 1)(x^2 - x + 1) + x(x^2 + 1)$.

Используя формулы сокращенного умножения, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем $(x - 2)(x + 2) - (x + 1)(x^2 - x + 1) + x(x^2 + 1) = x^2 - 2^2 - (x^3 + 1^3) + x^3 + x = x^2 - 4 - x^3 - 1 + x^3 + x = x^2 + x - 5$.

В результате преобразований получился многочлен второй степени.

Пример 4

Представим в виде многочлена выражение $(2a + 3b)^2 - 4a(a + 2b)$.

Используя формулу квадрата суммы, перемножая одночлен и многочлен и приводя подобные члены, получаем $(2a + 3b)^2 - 4a(a + 2b) = 4a^2 + 12ab + 9b^2 - 4a^2 - 8ab = 4ab + 9b^2$.

В результате преобразований получен многочлен второй степени.

III. Задания на уроках

№ 919 (а), 920 (а, в), 921 (б), 922, 924, 925, 927 (а), 928 (б), 929 (а).

IV. Контрольные вопросы

– Какое выражение называется целым?

– Является ли целым выражением:

а) сумма (разность) одночленов, многочленов;

б) произведение одночленов, многочленов;

в) натуральная степень одночлена, многочлена;

г) частное от деления одночленов, многочленов?

– Приведите примеры.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 919 (б), 920 (б, г), 921 (а), 923, 926, 927 (б), 928 (а), 929 (б).

Уроки 76, 77. Применение различных способов для разложения на множители

Цель: развить навыки разложения выражений на множители.

Планируемые результаты: научиться использовать различные приемы разложения выражений на множители.

Тип уроков: урок-исследование, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Является ли целым выражением сумма одночленов, многочленов? Приведите примеры.

2. Упростите выражение $(3a - 2b)(3a + 2b) - (3a - 4b)^2 + 20b^2$.

3. Представьте в виде многочлена выражение

$(a + 2)(a^2 + 4)(a^4 + 16)(a - 2)$.

Вариант 2

1. Является ли целым выражением частное от деления одночленов, многочленов? Приведите примеры.

2. Упростите выражение $(2a - 3b)(2a + 3b) - (2a - 5b)^2 + 34b^2$.

3. Представьте в виде многочлена выражение
$(a - 3)(a^2 + 9)(a^4 + 81)(a + 3)$.

III. Работа по теме уроков

При разложении на множители многочленов ранее уже использовались три основных способа:

1) вынесение общего множителя за скобки;
2) группировка членов, имеющих общий множитель;
3) применение формул сокращенного умножения.

В основном при разложении на множители используются сочетания указанных способов. При этом преобразование выражения надо начинать (если это возможно) с наиболее простого способа — вынесения общего множителя.

Пример 1

Разложим на множители многочлен $5a - 40a^4$.

Видно, что члены многочлена имеют общий множитель $5a$. Вынесем его за скобки: $5a - 40a^4 = 5a(1 - 8a^3)$.

Многочлен $1 - 8a^3$ представляет собой разность кубов числа 1 и одночлена $2a$ и также может быть разложен на множители: $1 - 8a^3 = 1^3 - (2a)^3 = (1 - 2a)(1 + 2a + 4a^2)$.

Таким образом, данный многочлен имеет вид $5a - 40a^4 = 5a(1 - 2a)(1 + 2a + 4a^2)$, т. е. многочлен разложен на множители — одночлен $5a$ и многочлены $1 - 2a$ и $1 + 2a + 4a^2$.

Пример 2

Разложим на множители многочлен $12x^3 - 12x^2 + 3x$.

Все члены многочлена имеют общий множитель $3x$. Вынесем его за скобки: $12x^3 - 12x^2 + 3x = 3x(4x^2 - 4x + 1)$.

Многочлен $4x^2 - 4x + 1$ является квадратом двучлена $2x - 1$, т. е. $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.

Таким образом, данный многочлен имеет вид $12x^3 - 12x^2 + 3x = 3x(2x - 1)^2$, т. е. многочлен разложен на множители — одночлен $3x$ и два многочлена $2x - 1$ (или квадрат многочлена $2x - 1$).

Пример 3

Разложим на множители многочлен $2a^2x^2 + 6ax^2 - 2abx^2 - 6bx^2$.

Сначала вынесем за скобки общий множитель $2x^2$ и получим $2a^2x^2 + 6ax^2 - 2abx^2 - 6bx^2 = 2x^2(a^2 + 3a - ab - 3b)$.

Теперь разложим на множители многочлен $a^2 + 3a - ab - 3b$. Для этого сгруппируем первый член с третьим и второй член с четвертым. Получаем $a^2 + 3a - ab - 3b = (a^2 - ab) + (3a - 3b) = a(a - b) + 3(a - b) = (a - b)(a + 3)$.

Таким образом, данный многочлен имеет вид $2a^2x^2 + 6ax^2 - 2abx^2 - 6bx^2 = 2x^2(a - b)(a + 3)$, т. е. многочлен разложен на множители — одночлен $2x^2$ и многочлены $a - b$ и $a + 3$.

Пример 4

Разложим на множители многочлен $12ax + 36 - 4a^2 - 9x^2$.

Сгруппируем первый, третий и четвертый члены многочлена: $36 + (12ax - 4a^2 - 9x^2)$. Из второго слагаемого вынесем общий множитель -1 и получим $36 - (4a^2 - 12ax + 9x^2)$. Выражение в скобках является квадратом разности. Поэтому получаем $6^2 - (2a - 3x)^2$. Используя формулу разности квадратов, разложим выражение на множители: $(6 - (2a - 3x)) \cdot (6 + (2a - 3x)) = (6 - 2a + 3x)(6 + 2a - 3x)$.

Таким образом, данный многочлен можно записать в виде $12ax + 36 - 4a^2 - 9x^2 = (6 - 2a + 3x)(6 + 2a - 3x)$, т. е. многочлен разложен на множители – многочлены $6 - 2a + 3x$ и $6 + 2a - 3x$.

Напомним, что иногда для разложения многочлена на множители удобно некоторые его члены *представить в другом виде* или *ввести дополнительные члены.*

Пример 5

Разложим на множители многочлен $x^3 - x^2 - 2x$.

Прежде всего, вынесем общий множитель x за скобки: $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2)$.

Затем разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 - x - 2$. Для этого последний член -2 представим в виде $-2 = -1 - 1$ и выполним группировку членов: $x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = (x^2 - 1) + (-x - 1) = (x^2 - 1) - (x + 1)$.

Используя формулу разности квадратов, разложим первое слагаемое на множители: $(x^2 - 1) - (x + 1) = (x - 1)(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x - 1 - 1) = (x + 1)(x - 2)$.

Поэтому данный многочлен имеет вид $x^3 - x^2 - 2x = x(x + 1) \times (x - 2)$, т. е. многочлен разложен на множители – одночлен x и два двучлена $x + 1$ и $x - 2$.

Пример 6

Разложим на множители многочлен $x^4 + x^2 + 1$.

Для разложения данного многочлена на множители дополним его до квадрата суммы. Для этого прибавим и вычтем x^2. Получаем $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + x^2 + 1 + x^2) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Таким образом, данный многочлен имеет вид $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$, т. е. многочлен четвертой степени разложен на множители – два многочлена второй степени $x^2 - x + 1$ и $x^2 + x + 1$.

Заметим, что *разложение* многочлена на множители подразумевает его представление *в виде произведения нескольких многочленов*. Так как при разложении многочленов на множители школьники часто допускают ошибки, то решим еще один пример.

Пример 7

Рассмотрим еще раз квадратный трехчлен $x^2 - x - 2$ из примера 5. Его разложением является представление $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, т. е. в виде произведения двух многочленов первой степени $x + 1$ и $x - 2$. Очень часто в работах школьников встречаются следующие «разложения» на множители:

1) $x^2 - x - 2 = 2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 1\right)$, не является разложением, так как второй множитель не имеет целых коэффициентов;

2) $x^2 - x - 2 = x(x - 1) - 2$, не является разложением, так как не представлено произведение множителей (из произведения $x(x - 1)$ вычитается число 2);

3) $x^2 - x - 2 = x\left(x - 1 - \frac{2}{x}\right)$, не является разложением, так как множитель $x - 1 - \frac{2}{x}$ не является многочленом.

Не каждый многочлен может быть разложен на множители. Например, нельзя разложить на множители многочлены $2x^2 + 4$, $3x^2 + 5x + 3$ и т. д.

IV. Задания на уроках

№ 934 (б), 936 (в), 938 (а), 939 (а, б), 940 (а), 942 (в, г), 944 (а, в), 946 (а, б), 950, 952.

V. Контрольные вопросы

- Перечислите основные способы разложения многочленов на множители.
- Охарактеризуйте каждый способ разложения многочленов на множители.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 934 (в), 936 (г), 937, 938 (б), 939 (в, г), 940 (б), 942 (а, б), 944 (б, г), 946 (в, г), 949, 953.

Уроки 78, 79. Применение преобразований целых выражений

Цель: развить навыки преобразования целых выражений для решения различных алгебраических задач.

Планируемые результаты: использовать преобразования целых выражений в различных задачах.

Тип уроков: уроки-практикумы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Разложите на множители:

а) $4x - xy^2$;

б) $8a^4 + 50b^2 - 40a^2b$;

в) $8 + x^3 + 2x^4 + 16x$.

2. Решите уравнение $25y^4 - y^2 = 0$.

Вариант 2

1. Разложите на множители:

а) $ab^2 - 16a$;

б) $32a^2 + 18b^4 - 48ab^2$;

в) $27x - 2x^3 + x^4 - 54$.

2. Решите уравнение $4x^4 - x^2 = 0$.

III. Работа по теме уроков

Ранее преобразования целых выражений использовались для упрощения вычислений и решения уравнений. Разумеется, область применения тождественных преобразований гораздо шире. Рассмотрим другие примеры применения преобразования целых выражений.

Пример 1

Докажем, что выражение $A = (3 - 2a)^2 + 2(3 - 2a)(2a - 1) + (2a - 1)^2$ не зависит от переменной a, и найдем его значение.

Легко заметить, что в выражение A входят квадраты выражений. Поэтому используем формулу квадрата суммы и получим $A = ((3 - 2a) + (2a - 1))^2 = (3 - 2a + 2a - 1)^2 = 2^2 = 4$.

Таким образом, выражение A не зависит от переменной a и его значение равно 4.

Пример 2

Докажем, что при любом значении x значения многочлена $x^2 - 8x + 20$ больше 3.

В данном многочлене выделим квадрат разности. Для этого представим число 20 в виде суммы двух слагаемых: $20 = 16 + 4$. Тогда многочлен имеет вид $x^2 - 8x + 20 = (x^2 - 8x + 16) + 4 = (x - 4)^2 + 4$. При всех значениях x значения выражения $(x - 4)^2$ неотрицательны. Если к этому выражению прибавить число 4, то значения выражения $(x - 4)^2 + 4$ будут больше или равны 4 и, соответственно, больше 3.

Пример 3

Докажем, что при всех целых значениях n значение выражения $(n + 3)(n + 5) - (n - 1)(n + 1)$ кратно 8.

Используя формулу разности квадратов, упростим данное выражение: $(n + 3)(n + 5) - (n - 1)(n + 1) = n^2 + 5n + 3n + 15 - (n^2 - 1) = n^2 + 8n + 15 - n^2 + 1 = 8n + 16 = 8(n + 2)$.

Так как величина n является целым числом, то и $n + 2$ — целое число. Поэтому при всех целых n значение выражения $8(n + 2)$ кратно 8.

Пример 4

При каких значениях переменных x и y значение выражения $A = 2xy - 2x^2 - y^2 + 4x - 1$ наибольшее? Найдем это значение.

В данном выражении выделим квадраты суммы или разности. Прежде всего, в многочлене A вынесем за скобки множитель (-1) и получим $A = -(-2xy + 2x^2 + y^2 - 4x + 1)$. Член $2x^2$ представим в виде суммы: $2x^2 = x^2 + x^2$, число 1 — в виде разности: $1 = 4 - 3$.

Получаем $A = -(-2xy + x^2 + y^2 + x^2 - 4x + 4 - 3) = -((x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) - 3) = -((x - y)^2 + (x - 2)^2 - 3) = 3 - (x - y)^2 - (x - 2)^2$.

Многочлен A представлен в виде разности числа 3 и выражений $(x - y)^2$ и $(x - 2)^2$. Очевидно, что при всех x и y эти выражения неотрицательны. Следовательно, многочлен A будет наибольшим, если вычитаемые $(x - y)^2$ и $(x - 2)^2$ минимальны, т. е. $(x - y)^2 = 0$ и $(x - 2)^2 = 0$. Получаем $x - y = 0$ и $x - 2 = 0$, откуда $x = y = 2$. Итак, наибольшее значение многочлена A равно 3 при $x = y = 2$.

Разумеется, преобразования целых выражений используются и в задачах на числа.

Пример 5

Докажем, что значение выражения $272^3 - 155^3$ кратно 9 и 13.

Используем формулу разности кубов и преобразуем данное числовое выражение: $272^3 - 155^3 = (272 - 155)(272^2 + 272 \cdot 155 + 155^2) = 117 \cdot (272^2 + 272 \cdot 155 + 155^2)$.

Данное выражение является произведением числа 117 и числового выражения $272^2 + 272 \cdot 155 + 155^2$ (которое является натуральным числом). При этом число 117 кратно и 9, и 13. Следовательно, данное число также кратно 9 и 13.

Пример 6

Определим, является ли число $4 \cdot 100^8 + 1$ простым или составным.

Заметим, что первая цифра в записи этого числа 4, затем идут шестнадцать цифр 0, и последняя цифра 1. В соответствии с признаками делимости это нечетное число не делится на четные числа 2, 4, 8, 10. Также оно не делится и на нечетные числа 3, 5 и 9. Поэтому для решения задачи использование признаков делимости ничего не дает.

Запишем данное число в виде $4 \cdot (100^2)^4 + 1 = 4 \cdot (10^4)^4 + 1$. Для удобства обозначим буквой a число 10^4, т. е. $a = 10^4$. Тогда данное число имеет вид $4a^4 + 1$. Разложим этот многочлен на множители, прибавляя и вычитая выражение $4a^2$. Получаем $4a^4 + 1 = (4a^4 + 4a^2 + 1) - 4a^2 = (2a^2 + 1)^2 - (2a)^2 = (2a^2 + 1 - 2a) \times$ $\times (2a^2 + 1 + 2a) = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$.

Подставим в это произведение значение a и получим $(2 \cdot (10^4)^2 - 2 \cdot 10^4 + 1)(2 \cdot (10^4)^2 + 2 \cdot 10^4 + 1)$.

Данное число представлено в виде произведения двух чисел, каждое из которых не равно 1 и данному числу. Тогда по определению данное число является составным.

IV. Задания на уроках

№ 990 (а), 991 (б), 992 (а, б), 994 (а), 996, 998 (б), 1001 (а), 1005 (б), 1006 (а), 1008, 1013 (а, б), 1021 (а–в), 1023 (б).

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 990 (б), 991 (а), 992 (в, г), 994 (б), 997, 998 (а), 1001 (б), 1005 (а), 1006 (б), 1013 (в, г), 1021 (г–е), 1023 (а).

Урок 80. Контрольная работа № 8 по теме «Формулы сокращенного умножения»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко, поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при выполнении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает учащимся некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 к набранным баллам добавляются дополнительно 0,5 балла, за решение задач вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (т. е. оценка «5» выставляется уже за четыре задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Возможно, несколько труднее для учеников задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен ученикам (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий). При наличии такой техники в классе на стенде (после контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов.

Контрольная работа рассчитана на один урок.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида выражение:

а) $(2a - 3b)^2$;

б) $(5x - 3y)(5x + 3y)$;

в) $2a^3(a + 2b)^2$.

2. Разложите на множители многочлен:

а) $25a^2 - 16$;

б) $-3x^2 + 6x - 3$;

в) $8x^3 + y^3$.

3. Решите уравнение $(5x + 3)^2 - (5x - 1)(5x + 1) = 28x + 4$.

4. Докажите, что выражение $2x^2 - 4xy + 4y^2$ может принимать только неотрицательные значения.

5. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} - 3$.

6. Докажите, что число $14^4 - 145^2$ кратно 3 и 17.

Вариант 2

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида выражение:

а) $(3a - 2b)^2$;

б) $(3x - 5y)(3x + 5y)$;

в) $3a^4(2a + b)^2$.

2. Разложите на множители многочлен:

а) $9x^2 - 25$;

б) $-3a^2 + 6a - 3$;

в) $y^3 - 8x^3$.

3. Решите уравнение $(4x + 1)^2 - (4x + 3)(4x - 3) = 6x - 2$.

4. Докажите, что выражение $4x^2 - 4xy + 2y^2$ может принимать только неотрицательные значения.

5. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} + 3$.

6. Докажите, что число $15^4 - 168^2$ кратно 3 и 19.

Вариант 3

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида выражение:
а) $2a(3a^2 - 5b)^2$;
б) $(2a - 3b^2)(4a^2 + 6ab^2 + 9b^4)$.

2. Разложите на множители выражение:
а) $9(a + 2)^2 - 4$;
б) $(a - 1)^3 + 8a^6$;
в) $(a - b)^2 + 2(a - b)(a + 3) + (a + 3)^2$.

3. Решите уравнение $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 8x(x^2 - 1) = 3x + 4$.

4. Найдите наименьшее значение выражения
$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 17$.

5. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} + x - 1$.

6. Докажите, что число $14^4 - 165^2 + 138^2 - 107^2$ кратно 31.

Вариант 4

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида выражение:
а) $3b(2a - 3b^2)^2$;
б) $(3a^2 - b)(9a^4 + 3a^2b + b^2)$.

2. Разложите на множители выражение:
а) $4(b - 3)^2 - 9$;
б) $(a + 1)^3 - 8a^6$;
в) $(2a - b)^2 - 2(2a - b)(a - 1) + (a - 1)^2$.

3. Решите уравнение
$(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 4x(2x^2 - 1) = 5x - 2$.

4. Найдите наименьшее значение выражения
$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 19$.

5. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + x + 1$.

6. Докажите, что число $15^4 - 186^2 + 173^2 - 134^2$ кратно 39.

Вариант 5

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида выражение:
а) $(2a + 3b)^3$;
б) $(a + b + 2)^2$;
в) $(-3x - 2y)(3x - 2y)$.

2. Разложите на множители выражение:
а) $4(a + 1)^2 - 9(b - 1)^2$;
б) $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 12xy$.

3. Решите уравнение $(x + 2)^3 - x^2(x + 5) - (x - 1)(x + 1) = 0$.

4. Найдите наибольшее значение выражения $7 + 4xy - 2y^2 - 4x^2$.

5. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} + \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$.

6. При любом натуральном значении n найдите остаток от деления значения выражения $(n + 1)(n + 5) - (n - 2)(n + 2)$ на 6.

Вариант 6

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида выражение:

а) $(3a - 2b)^3$;

б) $(2a + b + 1)^2$;

в) $(-2x - 5y)(2x - 5y)$.

2. Разложите на множители выражение:

а) $9(a - 2)^2 - 16(b + 1)^2$; б) $9x^2 + 16y^2 - 24xy - 9z^2$.

3. Решите уравнение $(x - 1)^3 - x^2(x - 4) - (x - 2)(x + 2) = 0$.

4. Найдите наибольшее значение выражения

$5 + 12xy - 5y^2 - 9x^2$.

5. Постройте график функции $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} + \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$.

6. При любом натуральном значении n найдите остаток от деления выражения $(n + 2)(n + 4) - (n - 1)(n + 1)$ на 6.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности.

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. а) $4a^2 - 12ab + 9b^2$; б) $25x^2 - 9y^2$; в) $2a^5 + 8a^4b + 8a^3b^2$.

2. а) $(5a - 4)(5a + 4)$; б) $-3(x - 1)^2$; в) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$.

3. $x = -3$.

4. Доказано.

5. Прямая $y = x - 2$, $x \neq -1$.

6. Доказано.

Вариант 2

1. а) $9a^2 - 12ab + 4b^2$; б) $9x^2 - 25y^2$; в) $12a^6 + 12a^5b + 3a^4b^2$.

2. а) $(3x - 5)(3x + 5)$; б) $-3(a - 1)^2$; в) $(y - 2x)(y^2 + 2xy + 4x^2)$.

3. $x = -6$.

4. Доказано.

5. Прямая $y = x + 2$, $x \neq 1$.

6. Доказано.

Вариант 3

1. а) $18a^5 - 60a^3b + 50ab^2$; б) $8a^3 - 27b^6$.

2. а) $(3a + 4)(3a + 8)$; б) $(2a^2 + a - 1)(4a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1)$; в) $(2a - b + 3)^2$.

3. $x = 1$.

4. 7.

5. Прямая $y = 2x + 1$, $x \neq -2$.

6. Доказано.

Вариант 4

1. а) $12a^2b - 36ab^3 + 27b^5$; б) $27a^6 - b^3$.

2. а) $(2b - 9)(2b - 3)$; б) $(a + 1 - 2a^2)(4a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1)$; в) $(a - b + 1)^2$.

3. $x = 3$.

4. 6.

5. Прямая $y = 2x - 1$, $x \neq 2$.

6. Доказано.

Вариант 5

1. Используем формулы сокращенного умножения и преобразуем данное выражение в многочлен стандартного вида.

а) Применяя формулу куба суммы, получим $(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot (3b)^2 + (3b)^3 = 8a^3 + 3 \cdot 4a^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot 9b^2 + 27b^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$.

б) В выражении $(a + b + 2)^2$ будем рассматривать сумму $a + b$ как одно число и используем формулу квадрата суммы. Получаем $(a + b + 2)^2 = ((a + b) + 2)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) \cdot 2 + 2^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 4a + 4b + 4$.

в) В выражении $(-3x - 2y)(3x - 2y)$ вынесем множитель (-1) из первого множителя и применим формулу разности квадратов. Получаем $(-3x - 2y)(3x - 2y) = -(3x + 2y)(3x - 2y) = -((3x)^2 - (2y)^2) = -(9x^2 - 4y^2) = 4y^2 - 9x^2$.

(*Ответы:* а) $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$; б) $a^2 + 2ab + b^2 + 4a + 4b + 4$; в) $4y^2 - 9x^2$.)

2. Используем формулы сокращенного умножения и разложим выражение на множители.

а) Воспользуемся формулой разности квадратов и получим $4(a+1)^2 - 9(b-1)^2 = 2^2 \cdot (a+1)^2 - 3^2 \cdot (b-1)^2 = (2(a+1))^2 - (3(b-1))^2 = (2a+2)^2 - (3b-3)^2 = ((2a+2)-(3b-3)) \cdot ((2a+2)+(3b-3)) = (2a+2-3b+3) \cdot (2a+2+3b-3) = (2a-3b+5)(2a+3b-1)$.

б) Сгруппируем члены в данном выражении и используем формулы квадрата разности и разности квадратов. Получаем $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 12xy = (4x^2 + 9y^2 - 12xy) - z^2 = (2x-3y)^2 - z^2 = (2x-3y-z)(2x-3y+z)$.

(*Ответы:* а) $(2a-3b+5)(2a+3b-1)$; б) $(2x-3y-z)(2x-3y+z)$.)

3. Преобразуем уравнение $(x+2)^3 - x^2(x+5) - (x-1)(x+1) = 0$. Для этого используем формулы куба суммы и разности квадратов и получим $x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 - x^3 - 5x^2 - (x^2 - 1) = 0$ или $6x^2 + 12x + 8 - 5x^2 - x^2 + 1 = 0$.

Приведем подобные члены: $12x + 9 = 0$, отсюда $x = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$.

(*Ответ:* $x = -\frac{3}{4}$.)

4. В данном выражении выделим квадрат разности. Для этого член $-2y^2$ представим в виде $-y^2 - y^2$ и сгруппируем члены. Получаем $7 + 4xy - 2y^2 - 4x^2 = 7 - y^2 - y^2 + 4xy - 4x^2 = 7 - y^2 + (-y^2 + 4xy - 4x^2) = 7 - y^2 - (y^2 - 4xy + 4x^2) = 7 - y^2 - (y-2x)^2$.

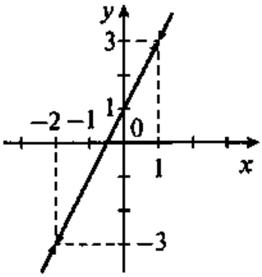
Данное выражение представляет собой разность числа 7 и двух неотрицательных величин y^2 и $(y-2x)^2$. Очевидно, что данное выражение будет наибольшим, если вычитаемые величины минимальны (т. е. равны нулю), откуда $y = 0$ и $y - 2x = 0$ (тогда $x = \frac{y}{2} = 0$).

Итак, при $x = y = 0$ данное выражение имеет наибольшее значение, равное 7.

(*Ответ:* 7.)

5. При построении графика функции $y = \frac{x^2-2x+1}{x-1} + \frac{x^2+4x+4}{x+2}$ учтем, что знаменатели дробей не равны нулю (т. е. $x - 1 \neq 0$ и $x + 2 \neq 0$), откуда $x \neq 1$ и $x \neq -2$. Числитель первой дроби является квадратом разности, числитель второй дроби – квадратом суммы. Поэтому можно сократить дроби. Получаем $y = \frac{x^2-2x+1}{x-1} + \frac{x^2+4x+4}{x+2} = \frac{(x-1)^2}{x-1} + \frac{(x+2)^2}{x+2} = x - 1 + x + 2 = 2x + 1$.

Итак, строим график линейной функции $y = 2x + 1$ (прямая линия). Удаляем из этого графика две точки с абсциссами $x = 1$ и $x = -2$ (показаны стрелками).



6. Используя формулу разности квадратов, преобразуем данное выражение: $(n + 1)(n + 5) - (n - 2)(n + 2) = n^2 + 5n + n + 5 - (n^2 - 4) = n^2 + 6n + 5 - n^2 + 4 = 6n + 9$.

Так как при всех натуральных n выражение $6n$ кратно 6, то остаток от деления выражения $6n + 9$ на 6 равен остатку от деления числа 9 на число 6. Такой остаток равен 3.

(*Ответ:* 3.)

Вариант 6

1. Используем формулы сокращенного умножения и преобразуем данное выражение в многочлен стандартного вида.

а) Применяя формулу куба суммы, получим $(3a - 2b)^3 = (3a)^3 - 3 \cdot (3a)^2 \cdot 2b + 3 \cdot 3a \cdot (2b)^2 - (2b)^3 = 27a^3 - 3 \cdot 9a^2 \cdot 2b + 9a \cdot 4b^2 - 8b^3 = 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$.

б) В выражении $(2a + b + 1)^2$ будем рассматривать сумму $2a + b$ как одно число и использовать формулу квадрата суммы. Получаем $(2a + b + 1)^2 = ((2a + b) + 1)^2 = (2a + b)^2 + 2(2a + b) + 1^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 + 4a + 2b + 1$.

в) В выражении $(-2x - 5y)(2x - 5y)$ вынесем множитель (-1) из первого множителя и применим формулу разности квадратов. Получаем $(-2x - 5y)(2x - 5y) = -(2x + 5y)(2x - 5y) = -((2x)^2 - (5y)^2) = -(4x^2 - 25y^2) = 25y^2 - 4x^2$.

(*Ответы:* а) $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$; б) $4a^2 + 4ab + b^2 + 4a + 2b + 1$; в) $25y^2 - 4x^2$.)

2. Используя формулы сокращенного умножения, разложим выражение на множители.

а) Воспользуемся формулой разности квадратов и получим: $9(a - 2)^2 - 16(b + 1)^2 = 3^2 \cdot (a - 2)^2 - 4^2 \cdot (b + 1)^2 = (3(a - 2))^2 - (4(b + 1))^2 = (3a - 6)^2 - (4b + 4)^2 = ((3a - 6) - (4b + 4)) \cdot ((3a - 6) + (4b + 4)) = (3a - 6 - 4b - 4) \cdot (3a - 6 + 4b + 4) = (3a - 4b - 10)(3a + 4b - 2)$.

б) Сгруппируем члены в данном выражении и используем формулы квадрата разности и разности квадратов. Получаем $9x^2 + 16y^2 - 24xy - 9z^2 = (9x^2 - 24xy + 16y^2) - 9z^2 = (3x - 4y)^2 - (3z)^2 = (3x - 4y - 3z)(3x - 4y + 3z)$.

(*Ответы:* а) $(3a - 4b - 10)(3a + 4b - 2)$; б) $(3x - 4y - 3z)$ $(3x - 4y + 3z)$.)

3. Преобразуем уравнение $(x - 1)^3 - x^2(x - 4) - (x - 2)(x + 2) = 0$. Для этого используем формулы куба суммы и разности квадратов и получаем $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + 4x^2 - (x^2 - 4) = 0$ или $x^2 + 3x - 1 - x^2 + 4 = 0$.

Приведем подобные члены: $3x + 3 = 0$, откуда $x = -1$.

(*Ответ:* $x = -1$.)

4. В данном выражении выделим квадрат разности. Для этого член $-5y^2$ представим в виде $-y^2 - 4y^2$ и сгруппируем члены. Получаем $5 + 12xy - 5y^2 - 9x^2 = 5 + 12xy - y^2 - 4y^2 - 9x^2 = 5 - y^2 - (4y^2 - 12xy + 9x^2) = 5 - y^2 - (2y - 3x)^2$.

Данное выражение представляет собой разность числа 5 и двух неотрицательных величин y^2 и $(2y - 3x)^2$. Очевидно, что данное выражение будет наибольшим, если вычитаемые величины минимальны (т. е. равны нулю), откуда $y = 0$ и $2y - 3x = 0$ (тогда $x = \frac{2}{3}y = 0$).

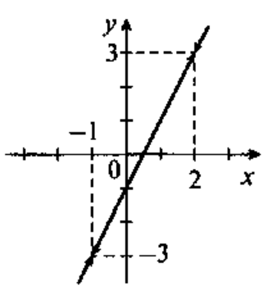
Итак, при $x = y = 0$ данное выражение имеет наибольшее значение, равное 5.

(*Ответ:* 5.)

5. При построении графика функции $y = \frac{x^2+2x+1}{x+1} + \frac{x^2-4x+4}{x-2}$ учтем, что знаменатели дробей не равны нулю (т. е. $x + 1 \neq 0$ и $x - 2 \neq 0$), откуда $x \neq -1$ и $x \neq 2$. Числитель первой дроби является квадратом суммы, числитель второй дроби – квадратом разности. Поэтому можно сократить дроби. Получаем

$$y = \frac{x^2+2x+1}{x+1} + \frac{x^2-4x+4}{x-2} = \frac{(x+1)^2}{x+1} + \frac{(x-2)^2}{x-2} = x + 1 + x - 2 = 2x - 1.$$

Итак, строим график линейной функции $y = 2x - 1$ (прямая линия). Удаляем из этого графика две точки с абсциссами $x = -1$ и $x = 2$ (показаны стрелками).



6. Используя формулу разности квадратов, преобразуем данное выражение: $(n + 2)(n + 4) - (n - 1)(n + 1) = n^2 + 4n + 2n + 8 - (n^2 - 1) = n^2 + 6n + 8 - n^2 + 1 = 6n + 9$.

Так как при всех натуральных n выражение $6n$ кратно 6, то остаток от деления выражения $6n + 9$ на 6 равен остатку от деления числа 9 на число 6. Такой остаток равен 3.

(*Ответ:* 3.)

VI. Подведение итогов урока

Факультативные уроки. Зачет по теме «Формулы сокращенного умножения»

Цели: сравнить успеваемость учащихся при одинаковой сложности заданий; иметь возможность повысить оценки за выполненные контрольные работы.

Тип уроков: уроки контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Общая характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи представлены в блоке А, более сложные — в блоке В, еще сложнее — в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается 1 баллом, из блока В — 2 баллами, из блока С — 3 баллами. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В — 8 баллов и блока С — 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» — за 10 баллов, оценка «5» — за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Работа рассчитана на два урока.

III. Зачетная работа

Вариант 1

А

1. Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение:
а) $(2a - 3)^2$; б) $(3a - 4b)(3a + 4b)$; в) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

2. Разложите на множители многочлен:
а) $4a^2 - 9$; б) $x^2 + 6ax + 9a^2$; в) $2c^4 - 4c^3 + 2c$.

3. Упростите выражение $2(a-b)^2-(a-2b)(a+2b)$.

4. Докажите, что число 187^3-5^9 кратно 62.

5. Сравните числа $(197+361)^2$ и 197^2+361^2.

6. Докажите, что при всех значениях x значение выражения $7-4x+4x^2$ больше 5.

7. Постройте график функции $y=(x+2)^2-4(x+1)$.

B

8. Преобразуйте в произведение выражение
$9a^2(b-c)^2-16a^2b^2$.

9. Вычислите без калькулятора:
$$\left(\frac{137{,}5^3-112{,}5^3}{5^2}+137{,}5\cdot 112{,}5\right):(225^2-25^2).$$

10. Найдите наименьшее значение выражения $2a^2-4ab+4b^2-2a+4$. При каких значениях a и b оно достигается?

11. Решите уравнение $(3x-2a)^2=(2x+a)^2$.

C

12. Сравните числа $189\cdot 191\cdot 193\cdot 195$ и 192^4.

13. При каких значениях a равенство $(x+7)^2-9(x+5)+2=(x+2)(x+a)$ является тождеством?

14. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2-4}{|x|-2}$.

Вариант 2

A

1. Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение:
а) $(3a-2)^2$; б) $(2a-5b)(2a+5b)$; в) $(x+3)(x^2-3x+9)$.

2. Разложите на множители многочлен:
а) $16-9a^2$; б) $x^2-8ax+16a^2$; в) $3c^4+12c^3+12c^2$.

3. Упростите выражение $3(a+b)^2-(2a+b)(2a-b)$.

4. Докажите, что число 117^3-4^9 кратно 53.

5. Сравните числа $(341+113)^2$ и 341^2+113^2.

6. Докажите, что при всех значениях x значение выражения $5-6x+9x^2$ больше 3.

7. Постройте график функции $y=(x-3)^2+6(x-1{,}5)$.

B

8. Преобразуйте в произведение выражение
$16a^2(b-2c)^2-9a^2b^2$.

9. Вычислите без калькулятора:
$$\left(\frac{144{,}5^3-95{,}5^3}{7^2}+144{,}5\cdot 95{,}5\right):(210^2-30^2).$$

10. Найдите наименьшее значение выражения $10a^2 - 6ab + b^2 - 4a + 6$. При каких значениях a и b оно достигается?

11. Решите уравнение $(3x - 4a)^2 = (x + 2a)^2$.

C

12. Сравните числа $273 \cdot 275 \cdot 277 \cdot 279$ и 276^4.

13. При каких значениях a равенство $(x + 5)^2 - 4(x + 7) + 11 = (x + 2)(x + a)$ является тождеством?

14. Постройте график функции $y = \dfrac{9 - x^2}{|x| - 3}$.

IV. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

A

1. а) $4a^2 - 12a + 9$; б) $9a^2 - 16b^2$; в) $x^3 - 8$.

2. а) $(2a - 3)(2a + 3)$; б) $(x + 3a)^2$; в) $2c^2(c - 1)^2$.

3. $a^2 - 4ab + 6b^2$.

4. Доказано.

5. Первое число больше.

6. Доказано.

7. Парабола $y = x^2$.

B

8. $-a^2(b + 3c)(7b - 3c)$.

9. $\frac{5}{4}$.

10. 3, при $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$.

11. $x = 3a$ и $x = \frac{a}{5}$.

C

12. Для сравнения чисел преобразуем первое число. Каждый множитель в нем запишем, используя число 192. Получаем $189 \cdot 191 \cdot 193 \cdot 195 = (192 - 3)(192 - 1)(192 + 1)(192 + 3)$.

Изменим порядок умножения чисел и используем формулу разности квадратов: $(192 - 3)(192 + 3)(192 - 1)(192 + 1) = (192^2 - 3^2)(192^2 - 1^2)$. В этом произведении каждый множитель меньше 192^2. Поэтому произведение меньше $192^2 \cdot 192^2 = 192^4$. Итак, первое число меньше второго.

(*Ответ:* первое число меньше.)

13. Используя формулу квадрата суммы, преобразуем данное равенство. Получаем $(x + 7)^2 - 9(x + 5) + 2 = (x + 2)(x + a)$ или $x^2 + 14x + 49 - 9x - 45 + 2 = x^2 + ax + 2x + 2a$.

Приведем подобные члены и получим: $5x + 6 = ax + 2x + 2a$ или $3x + 6 = ax + 2a$.

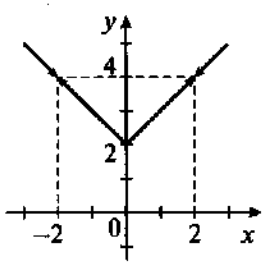
В левой и правой частях равенства стоят многочлены первой степени. Они будут тождественно равны, если коэффициенты при x в них одинаковы и свободные члены равны. Получаем условия: $3 = a$ и $6 = 2a$, которые выполняются только при $a = 3$. Итак, при $a = 3$ данное равенство является тождеством.

(*Ответ:* $a = 3$.)

14. Преобразуем данную функцию $y = \dfrac{x^2 - 4}{|x| - 2}$. Учтем, что $|x| - 2 \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 2$. Используем свойство модуля $x^2 = |x|^2$ и формулу разности квадратов. Тогда можно сократить дробь. Получаем $y = \dfrac{x^2 - 4}{|x| - 2} = \dfrac{|x|^2 - 2^2}{|x| - 2} = \dfrac{(|x| - 2)\cdot(|x| + 2)}{|x| - 2} = |x| + 2.$

Построим график функции $y = |x| + 2 = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x \geq 0, \\ -x + 2, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

Из этого графика удалим две точки с абсциссами $x \neq \pm 2$ (показаны стрелками).



Вариант 2

А

1. а) $9a^2 - 12a + 4$; б) $4a^2 - 25b^2$; в) $x^3 + 27$.
2. а) $(4 - 3a)(4 + 3a)$; б) $(x - 4a)^2$; в) $3c^2(c + 2)^2$.
3. $-a^2 + 6ab + 4b^2$.
4. Доказано.
5. Первое число больше.
6. Доказано.
7. Парабола $y = x^2$.

В

8. $a^2(b - 8c)(7b - 8c)$.
9. $\dfrac{4}{3}$.
10. 2, при $a = 2$, $b = 6$.
11. $x = 3a$ и $x = \dfrac{a}{2}$.

С

12. Для сравнения чисел преобразуем первое число. Каждый множитель в нем запишем, используя число 276. Получаем $273 \cdot 275 \cdot 277 \cdot 279 = (276 - 3)(276 - 1)(276 + 1)(276 + 3)$.

Изменим порядок умножения чисел и используем формулу разности квадратов: $(276 - 3)(276 + 3)(276 - 1)(276 + 1) = (276^2 - 3^2)(276^2 - 1^2)$. В этом произведении каждый множитель меньше 276^2. Поэтому произведение меньше $276^2 \cdot 276^2 = 276^4$. Итак, первое число меньше второго.

(*Ответ:* первое число меньше.)

13. Используя формулу квадрата суммы, преобразуем данное равенство. Получаем $(x + 5)^2 - 4(x + 7) + 11 = (x + 2)(x + a)$ или $x^2 + 10x + 25 - 4x - 28 + 11 = x^2 + ax + 2x + 2a$.

Приведем подобные члены и получим $6x + 8 = ax + 2x + 2a$ или $4x + 8 = ax + 2a$.

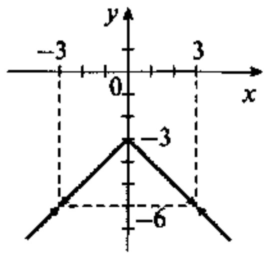
В левой и правой частях равенства стоят многочлены первой степени. Они будут тождественно равны, если коэффициенты при x в них одинаковы и свободные члены равны. Получаем условия: $4 = a$ и $8 = 2a$, которые выполняются только при $a = 4$. Итак, при $a = 4$ данное равенство является тождеством.

(*Ответ:* $a = 4$.)

14. Преобразуем данную функцию $y = \dfrac{9 - x^2}{|x| - 3}$. Учтем, что $|x| - 3 \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 3$. Используем свойство модуля $x^2 = |x|^2$ и формулу разности квадратов. Тогда можно сократить дробь. Получаем $y = \dfrac{9 - x^2}{|x| - 3} = \dfrac{9^2 - |x|^2}{|x| - 3} = \dfrac{(3 - |x|) \cdot (3 + |x|)}{|x| - 3} = -(3 + |x|) = - |x| - 3$.

Построим график функции $y = -|x| - 3 = \begin{cases} -x - 3, \text{ если } x \geq 0, \\ x - 3, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

Из этого графика удалим две точки с абсциссами $x \neq \pm 3$ (показаны стрелками).



V. Подведение итогов уроков

Глава VI
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 15. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

Урок 81. Линейное уравнение с двумя переменными

Цель: ознакомить с понятием уравнения с двумя переменными, решением таких уравнений.

Планируемые результаты: рассмотреть линейное уравнение с двумя переменными.

Тип урока: урок изучения нового материала.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

Пример 1

Пусть первое число (обозначим его x) больше квадрата второго числа (обозначим его y) на 3. По условию соотношение между числами можно описать равенством $x - y^2 = 3$. Это равенство с двумя переменными x и y, очевидно, выполняется не при всех значениях переменных. Используя подстановку, убеждаемся, что при $x = 7$ и $y = 2$ равенство $x - y^2 = 3$ выполняется. При $x = 5$ и $y = 2$ такое равенство не выполняется. Поэтому подобные равенства с двумя переменными называют уравнениями с двумя переменными (или двумя неизвестными). Пару чисел $x = 7$ и $y = 2$ называют решением уравнения.

Решение можно записать также в виде (7; 2), где первое число соответствует переменной x, второе число – переменной y. Сформулируем основные понятия.

Равенство, содержащее две переменные, называется уравнением с двумя переменными (или двумя неизвестными). В частности, если в уравнение входят неизвестные только первой степени, то такое уравнение называют *линейным* уравнением с двумя переменными. Линейное уравнение имеет вид $ax + by = c$ (где x и y – переменные, a, b и c – некоторые числа). Например, линейными являются уравнения $3x - 4y = 7$, $5x + 7y = 0$ и т. д.

Решением уравнения с двумя неизвестными называется пара значений переменных, при подстановке которых уравнение становится верным числовым равенством.

Уравнения с двумя переменными, ***имеющие одни и те же решения, называют равносильными.*** Уравнения с двумя переменными, не имеющие решения, также считают равносильными.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной:

1. Если в уравнении перенести любой член из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же (не равное нулю) число, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример 2

а) Уравнения $3x^2 + 4y^2 = 5$ и $3x^2 = 5 - 4y^2$ равносильны, так как член $4y^2$ перенесен (с изменением знака) из левой части в правую.

б) Уравнения $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = \frac{5}{12}$ и $3x^2 + 4y^2 = 5$ равносильны, так как обе части первого уравнения умножили на число 12 (не равное нулю) и получили $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}\right) \cdot 12 = \frac{5}{12} \cdot 12$, или $\frac{x^2}{4} \cdot 12 + \frac{y^2}{3} \cdot 12 = 5$, или $3x^2 + 4y^2 = 5$.

В 7 классе изучают только линейные уравнения, поэтому остановимся на них подробнее.

Пример 3

Рассмотрим уравнение $3x + 5y = 11$. Используя свойства уравнений, выразим из него одну переменную через другую, например y через x. Для этого перенесем член $3x$ из левой части в правую, изменив его знак. Получаем равносильное уравнение $5y = -3x + 11$. Разделим обе части этого уравнения на число 5 (оно не равно нулю). Получаем уравнение, равносильное данному: $y = -\frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$. Пользуясь этим равенством, для любого x

можно вычислить соответствующее значение y. Например, если $x = 2$, то $y = -\frac{3}{5}\cdot 2 + \frac{11}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{11}{5} = 1$, если $x = 7$, то $y = -\frac{3}{5}\cdot 7 + \frac{11}{5} = -\frac{21}{5} + \frac{11}{5} = -2$ и т. д.

Пары чисел (2; 1), (7; –2) – решения данного уравнения. Таким образом, это уравнение имеет бесконечно много решений.

Из данного уравнения $3x + 5y = 11$ можно выразить и переменную x через переменную y. Для этого перенесем член $5y$ из левой части в правую, изменив его знак. Получаем равносильное уравнение $3x = -5y + 11$. Разделим обе части этого уравнения на число 3 (оно не равно нулю). Получаем уравнение, равносильное данному: $x = -\frac{5}{3}y + \frac{11}{3}$. Пользуясь этим равенством, для любого y можно найти соответствующее значение x. Например, если $y = 2$, то $x = -\frac{5}{3}\cdot 2 + \frac{11}{3} = \frac{1}{3}$ и т. д. Пара чисел $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$ также является решением данного уравнения.

Заметим, что линейное уравнение всегда можно привести к виду $ax + by = c$, пользуясь равносильными преобразованиями.

Пример 4

Рассмотрим уравнение $\frac{2x+1}{3} = \frac{y-3}{5}$. В это уравнение переменные x и y входят в первой степени, поэтому оно является линейным. Умножим обе части уравнения на наименьшее общее кратное чисел 3 и 5 – число 15. Получаем равносильное уравнение $\frac{2x+1}{3}\cdot 15 = \frac{y-3}{5}\cdot 15$, или $(2x + 1)\cdot 5 = (y - 3)\cdot 3$, или $10x + 5 = 3y - 9$. Изменив знак, перенесем член $3y$ в левую часть, а член 5 – в правую. Вновь получаем уравнение, равносильное данному: $10x - 3y = -5 - 9$ или $10x - 3y = -14$.

Достаточно часто при решении задач необходимо найти или все пары *целых* чисел, или все пары *натуральных* чисел, удовлетворяющие уравнению (в том числе и линейному) с двумя переменными. Тогда говорят, что надо решить уравнение в целых числах или решить уравнение в натуральных числах.

Заметим, что подобные задачи рассматриваются на протяжении двух тысяч лет (например, доказательство Великой теоремы Ферма ученые искали более трехсот лет, и только недавно она была доказана). Одним из первых такие задачи стал анализировать древнегреческий математик Диофант (живший предположительно в III в.). Поэтому уравнения, для которых требуется найти решения в целых и натуральных числах, называются *диофантовы уравнения*.

Пример 5

Мальчик купил ластики по 3 руб. и карандаши по 5 руб. Сколько ластиков и карандашей купил мальчик, если известно, что за всю покупку он заплатил 49 руб.?

Пусть мальчик купил x ластиков и y карандашей. Запишем стоимость покупки и получим линейное уравнение с двумя переменными: $3x + 5y = 49$. Выразим из этого равенства, например, переменную y. Получаем $y = \frac{49 - 3x}{5}$.

Очевидно, что уравнение $3x + 5y = 49$ имеет *бесконечное множество решений*, которые являются *действительными* числами. Для любого действительного числа x по формуле $y = \frac{49 - 3x}{5}$ всегда можно найти единственное действительное число y.

Однако по смыслу задачи числа x и y должны быть натуральными. Будем в формулу $y = \frac{49 - 3x}{5}$ последовательно подставлять натуральные числа $x = 1, 2, 3, \ldots$. Найдем, при каких натуральных значениях x число y также будет натуральным. Получим лишь три *натуральных* решения уравнения: 1) $x = 3$, $y = 8$; 2) $x = 8$, $y = 5$; 3) $x = 13$, $y = 2$. При всех остальных натуральных значениях x число y будет или дробным положительным числом, или отрицательным числом.

Рассмотрим более сложную задачу.

Пример 6

Целое число N при делении на число 7 дает остаток 4, а при делении на число 4 – остаток 3. Найдите остаток от деления числа N на 28.

Пусть при делении числа N на 7 частное равно целому числу x. Тогда n можно записать в виде $N = 7x + 4$. Если число N при делении на 4 дает частное y, то представим N в виде $4y + 3$. Приравняем два полученных выражения для N и получим $7x + 4 = 4y + 3$. Выразим переменную y: $y = \frac{7x + 1}{4}$. Легко проверить, что при целом значении $x = 1$ число $y = 2$ также целое.

В выражении $y = \frac{7x + 1}{4}$ числа 7, 1, 4 не имеют общих делителей. Поэтому (кроме значения $x = 1$) решениями уравнения будут числа $x = 1 + 4n$ (где n – целое число). Покажем, что тогда число y также будет целым. Получаем $y = \frac{7x + 1}{4} = \frac{7(1 + 4n) + 1}{4} =$

$= \frac{28n + 8}{4} = 7n + 2$, это целое число. Итак, *все решения* диофантова уравнения $7x + 4 = 4y + 3$ описываются формулами $x = 4n + 1$ и $y = 7n + 2$ (где n – целое число).

Найдем теперь число N: $N = 7x + 4 = 7(4n + 1) + 4 = 28n + 11$. Эта запись означает, что при делении числа N на 28 получается частное n и остаток 11.

Разумеется, в курсе алгебры рассматриваются *не только линейные* диофантовы уравнения с двумя переменными.

Пример 7

Найдем целые решения уравнения $xy - 2x + y - 5 = 0$.

Запишем уравнение в виде $xy - 2x + y - 2 = 3$ и разложим его левую часть на множители: $(xy - 2x) + (y - 2) = 3$, или $x(y - 2) + (y - 2) = 3$, или $(x + 1)(y - 2) = 3$.

По условию задачи числа x и y – целые. Тогда числа $x + 1$ и $y - 2$ также целые и являются делителями числа 3, т. е. ± 1 и ± 3. Рассмотрим четыре возможных случая:

1) $\begin{cases} x + 1 = 1, \\ y - 2 = 3, \end{cases}$ откуда $x = 0$ и $y = 5$;

2) $\begin{cases} x + 1 = 3, \\ y - 2 = 1, \end{cases}$ откуда $x = 2$ и $y = 3$;

3) $\begin{cases} x + 1 = -1, \\ y - 2 = -3, \end{cases}$ откуда $x = -2$ и $y = -1$;

4) $\begin{cases} x + 1 = -3, \\ y - 2 = -1, \end{cases}$ откуда $x = -4$ и $y = 1$.

Таким образом, данное уравнение имеет четыре целых решения: (0; 5), (2; 3), (–2;–1), (–4; 1).

III. Задания на уроке

№ 1025 (а, б), 1026, 1028, 1029 (а), 1030, 1033 (б), 1036, 1038, 1041.

IV. Контрольные вопросы

– Что называется уравнением с двумя переменными? Приведите примеры.
– Какое уравнение с двумя переменными называется линейным? Приведите примеры.
– Напишите общий вид линейного уравнения с двумя переменными.
– Что называется решением уравнения с двумя переменными?
– Какие уравнения с двумя переменными называются равносильными?

– Какие преобразования уравнений с двумя переменными приводят к равносильным уравнениям?
– Что такое диофантовы уравнения?

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 1025 (в, г), 1027, 1029 (б), 1031, 1033 (а), 1037, 1039, 1042.

Уроки 82, 83. График линейного уравнения с двумя переменными

Цель: ознакомить с понятием графика линейного уравнения с двумя переменными.

Планируемые результаты: отработать навыки построения графика линейного уравнения.

Тип уроков: уроки-практикумы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Какое уравнение с двумя переменными называется линейным? Приведите примеры.

2. Из уравнения $3x - 5y = 7$ выразите каждую переменную через другую.

3. Найдите значение величины a, если уравнение $ax + 3y = 11$ имеет решение $x = 2$, $y = 1$.

Вариант 2

1. Что называется решением линейного уравнения с двумя переменными? Приведите примеры.

2. Из уравнения $4x - 5y = 9$ выразите каждую переменную через другую.

3. Найдите значение величины a, если уравнение $5x + ay = 9$ имеет решение $x = 3$, $y = 2$.

III. Работа по теме уроков

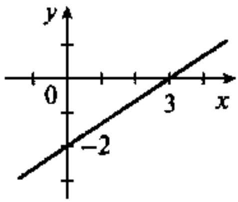
Рассмотрим решения некоторого уравнения с двумя переменными. Каждое такое *решение представляет собой пару чисел*, которая изображается на координатной плоскости точкой (ее абсцисса равна значению x, ордината – значению y). Аналогично построим *все решения* данного уравнения, которые также изображаются точками. Множество таких точек образует график уравнения.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решением этого уравнения.

Пример 1

Рассмотрим уравнение $2x - 3y = 6$. Выразим из него переменную y через x. Получаем $-3y = 6 - 2x$ или $y = \frac{2}{3}x - 2$.

Уравнения $2x - 3y = 6$ и $y = \frac{2}{3}x - 2$ равносильны. Формула $y = \frac{2}{3}x - 2$ задает линейную функцию. Построим ее график – прямую линию. Так как уравнения $2x - 3y = 6$ и $y = \frac{2}{3}x - 2$ равносильны, то построенная прямая будет и графиком уравнения $2x - 3y = 6$.



Из рассмотренного примера видно, что графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая. Обсудим возможные варианты построения графика линейного уравнения $ax + by = c$.

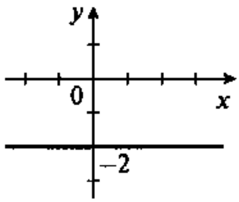
а) Если коэффициент b при неизвестной y не равен нулю (т. е. $b \neq 0$), то можно выразить переменную y через x. Получаем $by = -ax + c$ или $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Формула $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ задает линейную функцию. *График этой функции – прямая, наклоненная под* определенным *углом к оси абсцисс* (см. пример 1) *при условии* $a \neq 0$.

б) Если коэффициенты $b \neq 0$ и $a = 0$, тогда, подставив значение $a = 0$ в формулу $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, получим $y = \frac{c}{b}$. Формула $y = \frac{c}{b}$ задает *прямую, которая или параллельна оси абсцисс, или* *совпадает с ней*, так как при любых значениях x величина y постоянна.

Пример 2

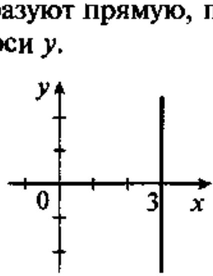
Рассмотрим уравнение $0 \cdot x - 3y = 6$. Найдем из этого равенства $y = -\frac{6}{3} = -2$. Построим график функции $y = -2$. Видно, что при любом значении x величина y одна и та же и $y = -2$. Поэтому графиком является прямая, параллельная оси абсцисс.



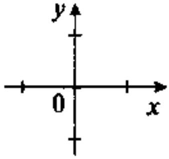
в) Если коэффициенты $a \neq 0$ и $b = 0$, тогда, подставив $b = 0$ в уравнение $ax + by = c$, получим $ax = c$, откуда $x = \frac{c}{a}$. По аналогии со случаем *б* формула $x = \frac{c}{a}$ задает *прямую, которая или параллельна оси ординат*, *или совпадает с ней*, так как при любых значениях y величина x постоянна.

Пример 3

Рассмотрим уравнение $2x + 0 \cdot y = 6$. Найдем из этого равенства $x = \frac{6}{2} = 3$. Решением данного уравнения будут все пары чисел $(x; y)$, для которых $x = 3$, y – любое число. График уравнения состоит из точек, абсцисса которых равна 3, ордината – любому числу. Такие точки образуют прямую, проходящую через точку $(3; 0)$ и параллельную оси y.



г) Если коэффициенты $a = 0$, $b = 0$ и $c = 0$, тогда уравнение $ax + by = c$ имеет вид $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$. Очевидно, что любая пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет этому уравнению. Поэтому графиком уравнения являются *все точки координатной плоскости* (или вся координатная плоскость).



д) Если коэффициенты $a = 0$, $b = 0$ и $c \neq 0$, тогда уравнение $ax + by = c$ имеет вид $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$. Очевидно, что такое уравнение решений не имеет и ни одна точка координатной плоскости не принадлежит графику этого уравнения, т. е. *график* уравнения *не существует*.

Для удобства результаты проведенного анализа приведены в таблице.

Коэффициент уравнения			График
a	b	c	
$\neq 0$	$\neq 0$		Прямая с наклоном к оси x
$= 0$	$\neq 0$		Прямая, параллельная оси x
$\neq 0$	$= 0$		Прямая, параллельная оси y
$= 0$	$= 0$	$= 0$	Координатная плоскость
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	Нет

Рассмотрим более сложные задачи.

Пример 4

При каком значении параметра a график уравнения $(4a - 3) \times \times x + (3a - 6) \cdot y = 3a + 4$ параллелен оси ординат? Постройте этот график.

На основании данных таблицы график этого линейного уравнения будет параллелен оси ординат, если коэффициент при неизвестном y равен нулю, т. е. $3a - 6 = 0$, откуда $a = 2$. Подставим это значение a в данное уравнение и получим $(4 \cdot 2 - 3) \cdot x + (3 \cdot 2 - 6) \cdot y = 3 \cdot 2 + 4$ или $5x + 0 \cdot y = 10$.

Из этого равенства находим $x = \dfrac{10}{5} = 2$. Построим график данного уравнения. Им является прямая, проходящая через точку (2; 0) параллельно оси ординат.

Пример 5

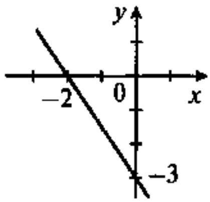
При всех значениях параметра a постройте график уравнения $3ax + 2ay - 3x - 2y + 6a - 6 = 0$.

Преобразуем данное уравнение. Для этого сгруппируем члены, зависящие и не зависящие от параметра a. Вынесем общие множители за скобки. Получаем $(3ax + 2ay + 6a) + (-3x - 2y - 6) = 0$, или $a(3x + 2y + 6) - (3x + 2y + 6) = 0$, или $(3x + 2y + 6)(a - 1) = 0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Рассмотрим эти случаи.

а) Пусть первый множитель равен нулю, т. е. $3x + 2y + 6 = 0$. Выразим из этого уравнения переменную y. Получаем $2y = -3x - 6$ и $y = -\frac{3}{2}x - 3$.

Эта формула определяет линейную функцию. Построим график. Им является наклонная прямая.



б) Пусть второй множитель равен нулю, т. е. $a - 1 = 0$ или $a = 1$. Очевидно, что при таком значении a переменные x и y могут быть любыми. Поэтому в этом случае графиком уравнения будет координатная плоскость.

Итак, при $a \neq 1$ график данного уравнения представлен в пункте *а*, при $a = 1$ – в пункте *б*.

IV. Задания на уроках

№ 1045 (а, г), 1047, 1048 (б, г, е), 1049 (а, в), 1050 (б, г), 1051, 1053.

V. Контрольные вопросы

– Что является графиком уравнения с двумя переменными?

– Какой график может иметь линейное уравнение с двумя переменными?

– При каком условии график линейного уравнения пересекает оси координат?
– При каком условии график линейного уравнения параллелен оси: а) абсцисс; б) ординат? Приведите примеры.
– При каких условиях графиком линейного уравнения является координатная плоскость? Приведите примеры.
– При каких условиях у линейного уравнения нет графика? Приведите примеры.

VI. Творческие задания

1. При каком значении параметра a график уравнения:

а) $(a-2)x+(2a-6)y+8=0$ параллелен оси x;

б) $(3a-1)x+(a-1)y-6=0$ параллелен оси y;

в) $(2a-6)x+(a-3)y-4a+12=0$ является координатной плоскостью;

г) $(6-4a)x+(2a-3)y+3a=0$ не существует?

Для пунктов *а* и *б* постройте график уравнения.

(*Ответы:* а) $a=2$, прямая $y=4$; б) $a=1$, прямая $x=3$; в) $a=3$; г) $a=\frac{3}{2}$.)

2. График данного уравнения проходит через точку A. Постройте этот график.

а) $2ax+3y=8$, A (1; 2);

б) $(a-1)x+(a+1)y=2$, A (1; 1);

в) $(a+2)x+(2a-1)y=5$, A (2; 1);

г) $ax+2ay+x+2y=5a+5$, A (3; 1).

(*Ответы:* а) $a=1$; б) $a=1$; в) $a=\frac{1}{2}$; г) a – любое число.)

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1045 (б, в), 1046, 1048 (а, в, д), 1049 (б, г), 1050 (а, в), 1052.

Уроки 84, 85. Системы линейных уравнений с двумя переменными

Цель: рассмотреть понятие системы линейных уравнений с двумя переменными, графический способ решения таких систем.

Планируемые результаты: ознакомиться с системами линейных уравнений с двумя переменными.

Тип уроков: урок проблемного изложения, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Пример 1

В двух седьмых классах 57 учеников. В 7 «А» классе на 5 учеников больше, чем в 7 «Б» классе. Сколько учеников в каждом классе?

Пусть в 7 «А» классе x учеников, в 7 «Б» классе – y учеников. По условию задачи в двух классах 57 учеников, т. е. $x + y = 57$. В 7 «А» классе на 5 учащихся больше, т. е. $x - y = 5$. Итак, мы составили два линейных уравнения с двумя переменными (или неизвестными) $x + y = 57$ и $x - y = 5$. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти такие значения переменных x и y, при которых каждое из уравнений будет верным равенством, т. е. нужно найти общее решение этих уравнений. В таких случаях говорят, что надо решить систему уравнений.

Систему уравнений принято записывать с помощью фигурной скобки. Полученную систему уравнений можно записать в виде $\begin{cases} x + y = 57, \\ x - y = 5. \end{cases}$

Пара чисел $x = 31$ и $y = 26$ удовлетворяет каждому уравнению, так как при их подстановке в уравнения получаем верные числовые равенства: $\begin{cases} 31 + 26 = 57, \\ 31 - 26 = 5. \end{cases}$

Такую пару чисел называют решением системы уравнений.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, при которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство. Решить систему уравнений – значит ***найти все ее решения*** или ***доказать, что решений нет.***

В примере 1 было указано решение системы (оно является единственным). Система уравнений может и не иметь решений.

Пример 2

Рассмотрим систему линейных уравнений $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ -2x + 4y = 8. \end{cases}$

Второе уравнение системы заменим равносильным. Для этого все его члены разделим на число –2 и получим $x - 2y = -4$. Тогда система уравнений имеет вид $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x - 2y = -4. \end{cases}$

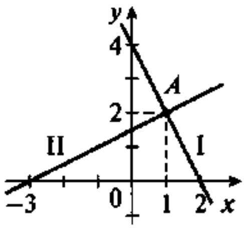
Из первого уравнения следует, что величина $x - 2y$ равна 5. Из второго уравнения та же величина $x - 2y$ равна -4. Очевидно, что при любых значениях x и y величина $x - 2y$ не может равняться двум различным числам 5 и -4. Поэтому данная система уравнений решений не имеет.

Для решения систем уравнений можно *использовать графики* этих уравнений (графический способ решения). *Достоинство* такого способа решения в его *наглядности*, *недостаток — в приближенных значениях решения.*

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$

Построим графики уравнений системы. Для этого из каждого уравнения выразим переменную y. При этом каждое уравнение системы заменяется равносильным. Получаем систему уравнений $\begin{cases} y = 4 - 2x, \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}. \end{cases}$



Графиком первого уравнения является прямая I, т. е. координаты всех точек этой прямой удовлетворяют такому уравнению. Графиком второго уравнения является прямая II. Имеем точку A, в которой данные прямые пересекаются (она расположена и на первой, и на второй прямой). Поэтому координаты этой точки удовлетворяют каждому уравнению системы, т. е. являются решением системы уравнений. Определяем координаты точки A и находим $x = 1$ и $y = 2$. (Вообще говоря, определить координаты можно лишь приближенно.) Подставив значения x и y в данную систему $\begin{cases} 2 \cdot 1 + 2 = 4, \\ 1 - 2 \cdot 2 = -3, \end{cases}$ убеждаемся, что $x = 1$ и $y = 2$ — решение этой системы.

Итак, в примере 3 система имеет единственное решение.

Обсудим вопрос о количестве решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными. *Общий вид* такой системы:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \qquad (1)$$

где x и y – неизвестные, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – некоторые числа. Если из каждого уравнения выразить переменную y, то систему (1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} y = k_1x + d_1, \\ y = k_2x + d_2, \end{cases} \qquad (2)$$

где k_1, k_2, d_1, d_2 – некоторые числа. В зависимости от расположения прямых, соответствующих каждому уравнению системы, возможны три варианта при ее решении.

1. Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (или $k_1 \neq k_2$), то *прямые пересекаются* и система имеет *единственное решение.*

Пример 4

Вернемся еще раз к примеру 3. Там рассматривалась система $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$

В такой системе $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_2 = -2$. Проверим условие $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ и получим $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2}$. После преобразований система имела вид $\begin{cases} y = -2x + 4, \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}. \end{cases}$

В такой системе $k_1 = -2$ и $k_2 = \frac{1}{2}$. В ней угловые коэффициенты прямых различны, т. е. $k_1 \neq k_2$. Видно, что для рассматриваемой системы условие единственности решения было выполнено. Соответственно, эта система имеет единственное решение.

2. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (или $k_1 = k_2$ и $d_1 \neq d_2$), то *прямые параллельны* и система *не имеет решений.*

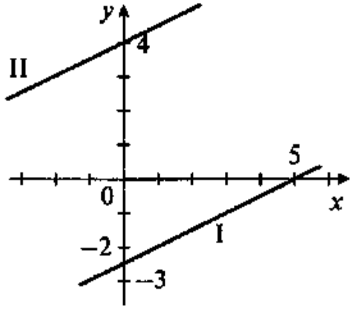
Пример 5

Вернемся к примеру 2. Там рассматривалась система $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ -2x + 4y = 8. \end{cases}$

Для такой системы $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $b_1 = -2$, $b_2 = 4$, $c_1 = 5$, $c_2 = 8$. Проверим условие $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ и получим $\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} \neq \frac{5}{8}$. Из каждого уравнения выразим переменную y и запишем систему в виде $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, \\ y = \frac{1}{2}x + 4. \end{cases}$

В этой системе $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $d_1 = -\frac{5}{2}$, $d_2 = 4$. Поэтому условия $k_1 = k_2$ и $d_1 \neq d_2$ выполнены. Видно, что для рассматриваемой системы условие отсутствия решений было выполнено, поэтому такая система решений не имеет.

В отсутствии решений легко убедиться, построив графики первого уравнения $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ (прямая I) и второго уравнения $y = \frac{1}{2}x + 4$ (прямая II). Видно, что прямые I и II параллельны. Соответственно, эти прямые не имеют общих точек, т. е. нет такой точки, координаты которой были бы решением и первого, и второго уравнений. Поэтому данная система решений не имеет.



Если *система* уравнений *не имеет решений*, то она называется *несовместной*.

3. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (или $k_1 = k_2$ и $d_1 = d_2$), то *прямые совпадают* и система имеет *бесконечно много решений*.

Пример 6

Рассмотрим систему $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ -2x + 4y = -10. \end{cases}$

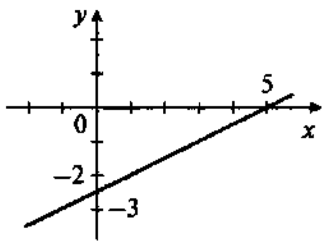
В такой системе $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $b_1 = -2$, $b_2 = 4$, $c_1 = 5$, $c_2 = -10$. Проверим условие $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ и получим $\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{5}{-10}$. Второе уравнение разделим на число −2 и из каждого уравнения выразим переменную y.

Запишем систему в виде $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}. \end{cases}$

В этой системе $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $d_1 = -\frac{5}{2}$, $d_2 = -\frac{5}{2}$.

Очевидно, что равенства $k_1 = k_2$ и $d_1 = d_2$ выполнены. Условия бесконечного множества решений осуществлены, соответственно, эта система имеет бесконечное множество решений. Если построим графики уравнений $x - 2y = 5$ и $-2x + 4y = -10$, то увидим, что они совпадают. Любая точка, расположенная на построенной прямой, имеет координаты, которые являются решением данной системы. Очевидно, что таких решений бесконечно много.

Однако не все пары чисел x и y являются решениями этой системы. Решениями будут такие пары чисел x и y, для которых $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.



Если система имеет *бесконечно много решений*, то она называется *неопределенной*.

Пример 7

При каких значениях a система уравнений

$\begin{cases} (2a-1)x + 3y = 7a + 1, \\ (a+2)x + 2y = 5a - 3 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Запишем условие единственности решения: $\frac{2a-1}{a+2} \neq \frac{3}{2}$.

Используя свойство пропорции, получаем $2(2a - 1) \neq 3(a + 2)$ или $4a - 2 \neq 3a + 6$, откуда $a \neq 8$. Итак, при всех значениях a, кроме $a = 8$, данная система имеет единственное решение.

Пример 8

При каком значении a система уравнений

$\begin{cases} (2a-1)x + 3y = 7a + 1, \\ (2a+1)x + 5y = 5a - 3 \end{cases}$ несовместна?

Запишем условие несовместности системы:
$\frac{2a-1}{2a+1}=\frac{3}{5}\neq\frac{7a+1}{5a-3}$.

Сначала рассмотрим равенство $\frac{2a-1}{2a+1}=\frac{3}{5}$. Используя свойство пропорции, получаем $5(2a-1)=3(2a+1)$, или $10a-5=$ $=6a+3$, или $4a=8$, откуда $a=2$.

Теперь проверим неравенство $\frac{3}{5}\neq\frac{7a+1}{5a-3}$. При подстановке значения $a=2$ получаем $\frac{3}{5}\neq\frac{7\cdot2+1}{5\cdot2-3}$ или $\frac{3}{5}\neq\frac{15}{7}$ (верное неравенство). Итак, при $a=2$ данная система несовместна.

Пример 9

При каком значении a система уравнений
$\begin{cases}(2a-1)x+3y=7a+1,\\(a+1)x+6y=11a+5\end{cases}$ неопределенна? Укажите решения системы.

Запишем условие неопределенности системы:
$\frac{2a-1}{a+1}=\frac{3}{6}=\frac{7a+1}{11a+5}$.

Сначала рассмотрим равенство $\frac{2a-1}{a+1}=\frac{3}{6}$ или $\frac{2a-1}{a+1}=\frac{1}{2}$. Используя свойство пропорции, получаем $2(2a-1)=a+1$, или $4a-2=a+1$, или $3a=3$, откуда $a=1$.

Теперь проверим равенство $\frac{3}{6}=\frac{7a+1}{11a+5}$. При подстановке значения $a=1$ имеем $\frac{3}{6}=\frac{7\cdot1+1}{11\cdot1+5}$ или $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (верное равенство). Итак, при $a=1$ данная система неопределенна.

Подставим значение $a=1$ в данную систему и получим
$\begin{cases}x+3y=8,\\2x+6y=16.\end{cases}$

Поделим второе уравнение на число 2. Получаем систему
$\begin{cases}x+3y=8,\\x+3y=8.\end{cases}$

Решением такой системы будет любая пара чисел x и y, в которой $x=8-3y$, а y — произвольное число.

III. Задания на уроках

№ 1056, 1058 (а), 1059 (б), 1060 (а, б), 1061 (а), 1062 (а, в, д), 1063, 1064 (а).

IV. Контрольные вопросы

– Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?
– Что значит решить систему уравнений?
– Сколько решений может иметь система линейных уравнений с двумя переменными?
– Напишите общий вид системы линейных уравнений с двумя переменными.
– Напишите условие единственности решения системы уравнений.
– Напишите условие несовместности системы уравнений.
– Напишите условие неопределенности системы уравнений.

V. Творческие задания

1. При каком значении параметра a система уравнений имеет данное решение (указанное в скобках)?

а) $\begin{cases} 2ax + 3y = 10, \\ 5x + 4ay = 5a + 11 \end{cases}$ (1; 2);

б) $\begin{cases} 4x + 7ay = 8 - 7a, \\ 3ax - 5y = 6a + 5 \end{cases}$ (2; –1);

в) $\begin{cases} (2a+3)x + (a+1)y = 1, \\ -5ax - 4(a-1)y = 7 + 2a \end{cases}$ (–1; 1);

г) $\begin{cases} (3a-1)x + 2ay = a + 3, \\ (2a+1)x - (a+1)y = 2a - 1 \end{cases}$ (1; 1);

д) $\begin{cases} 3x - 5y = 2a + 17, \\ 2ax + 3y = 4a - 2 \end{cases}$ (1; a);

е) $\begin{cases} 2x - 3y = a - 10, \\ 5x + 4y = 20 + 3a \end{cases}$ (a; $2a$).

(*Ответы:* а) $a = 2$; б) a – любое число; в) $a = -3$; г) $a = 1$; д) $a = -2$; е) $a = 2$.)

2. При каких значениях параметра a система имеет единственное решение?

а) $\begin{cases} 3ax + 2y = a + 3, \\ 6x + 4y = 2a + 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5ax + 3y = 2a - 1, \\ 3x + 2y = a + 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} ax + 2y = 3a + 5, \\ 2x + ay = a - 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x + ay = 2a + 3, \\ 4ax + 3y = a - 4. \end{cases}$

(*Ответы:* а) $a \neq 1$; б) $a \neq \frac{9}{10}$; в) $a \neq \pm 2$; г) $a \neq \pm 1{,}5$.)

3. При каком значении параметра a система уравнений несовместна?

а) $\begin{cases}2ax+3y=a+1,\\6x+y=2a-1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}(a-1)x+(2a-1)y=7a-1,\\2x+5y=3a+2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}5x-3ay=3a+1,\\10x+6y=5a+7;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(3a-1)x+2y=4a+1,\\ax+y=3a.\end{cases}$

(*Ответы:* а) $a=9$; б) $a=-1$; в) $a=3$; г) $a=1$.)

4. При каком значении параметра a система уравнений неопределенна?

а) $\begin{cases}3ax-2y=a-2,\\3x+y=-a;\end{cases}$ в) $\begin{cases}ax+2y=5a,\\2x+ay=a+8;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(a-1)x+3y=a+2,\\ax+4y=2a;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(a-1)x+y=2a-3,\\3x+(a+1)y=-a+5.\end{cases}$

(*Ответы:* а) $a=-2$; б) $a=4$; в) $a=2$; г) $a=-2$.)

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1057, 1058 (б), 1059 (а), 1060 (в, г), 1061 (б), 1062 (б, г, е), 1064 (б).

§ 16. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уроки 86–88. Способ подстановки

Цель: рассмотреть способ подстановки для решения систем линейных уравнений.

Планируемые результаты: научиться применять способ подстановки для решения систем линейных уравнений.

Тип уроков: урок изучения нового материала, продуктивный урок.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?

2. Запишите условие единственности решения системы уравнений.

3. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ y - x = 1. \end{cases}$

4. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 3x + 5y = a + 2, \\ 6x + ay = 2a \end{cases}$ несовместна?

Вариант 2

1. Что значит решить систему уравнений?

2. Запишите условие несовместности системы уравнений.

3. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 2y - x = 3. \end{cases}$

4. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} ax + 2y = a + 3, \\ 2x + 4y = 5a \end{cases}$ имеет единственное решение?

III. Работа по теме уроков

Системы уравнений с двумя переменными, которые *имеют одни и те же решения или не имеют решений*, называются *равносильными.*

Пример 1

а) Две системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x + 5y = 13 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 7x - 9y = 5 \end{cases}$ равносильны, так как имеют одно и то же решение (2; 1).

б) Две системы уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ -6x + 4y = 7 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + 5y = 6, \\ -4x - 10y = 8 \end{cases}$ равносильны, так как каждая из них не имеет решений.

При решении системы уравнений с помощью преобразований ее заменяют более простой равносильной системой. Одним из распространенных способов решения систем уравнений является *способ подстановки.* Рассмотрим его на примере.

Пример 2

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 3x - 2y = -1. \end{cases} \qquad (1)$$

Из первого уравнения выразим переменную y через x и получим $y = 4 - 2x$ (заметим, что данное уравнение равносильно исходному). Подставим это выражение во второе уравнение вместо переменной y и получим систему

$$\begin{cases} y = 4 - 2x, \\ 3x - 2(4 - 2x) = -1. \end{cases} \qquad (2)$$

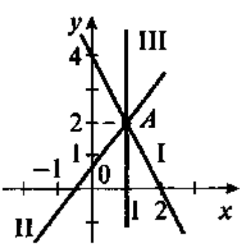
Докажем, что системы (1) и (2) равносильны.

В системе (2) второе уравнение содержит только одну переменную x. Решим это линейное уравнение. Получаем $3x - 8 + 4x = -1$ или $7x = 7$, откуда $x = 1$. Подставим значение $x = 1$ в первое уравнение системы (2) и найдем $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$. Пара чисел $(1; 2)$ – решение системы (2), а значит, и системы (1).

В равносильности систем (1) и (2) легко убедиться. Решение $x = 1$, $y = 2$ является единственным решением системы (2). В системе (1) коэффициенты при неизвестных удовлетворяют условию $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-2}$. Поэтому она имеет единственное решение. Подставив значения $x = 1$, $y = 2$ в эту систему, убеждаемся, что такая пара чисел и есть решение системы (1).

Также можно убедиться в равносильности систем (1) и (2), используя графический способ. Для этого нужно показать, что графики уравнений системы (1) пересекаются в той же точке, что и графики уравнений системы (2). Сначала построим график первого уравнения системы (1) – прямую I, затем график второго уравнения – прямую II. Они пересекаются в точке A.

Графиком первого уравнения системы (2) является прямая I. График второго уравнения – вертикальная прямая $x = 1$ (прямая III). Видно, что эти графики также пересекаются в точке A. Поэтому системы (1) и (2) равносильны.



Система линейных уравнений с двумя переменными была решена *способом подстановки*. Заметим, что таким способом решаются и системы нелинейных уравнений.

При решении систем этим способом:

1) выражают из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;

2) подставляют в другое уравнение полученное выражение вместо этой переменной;

3) решают полученное уравнение с одной переменной;

4) находят соответствуюшее значение второй переменной.

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 2x - 5y = 3. \end{cases}$

Выразим из первого уравнения переменную y через x. Получаем $4y = 5 - 3x$ или $y = \frac{5 - 3x}{4}$.

Подставим во второе уравнение вместо y полученное выражение $\frac{5 - 3x}{4}$. Получаем уравнение с одной переменной: $2x - 5 \cdot \frac{5 - 3x}{4} = 3$. Умножим все члены уравнения на число 4. Получаем $8x - 5(5 - 3x) = 12$, или $8x - 25 + 15x = 12$, или $23x = 37$, откуда $x = \frac{37}{23}$.

Подставим в уравнение $y = \frac{5 - 3x}{4}$ вместо x число $\frac{37}{23}$ и получим

$$y = \frac{5 - 3 \cdot \frac{37}{23}}{4} = \left(5 - 3 \cdot \frac{37}{23}\right) : 4 = \frac{5 \cdot 23 - 3 \cdot 37}{23} : 4 = \frac{115 - 111}{23} : 4 = \frac{1}{23}.$$

Итак, единственное решение данной системы $x = \frac{37}{23}$ и $y = \frac{1}{23}$.

Заметим, что найти это решение графическим способом можно лишь приближенно.

Способом подстановки можно решать и системы уравнений, *содержащих параметры*.

Пример 4

При каких значениях параметра a решением системы уравнений $\begin{cases} 2x - y = -3, \\ 3x + 2y = 7a - 1 \end{cases}$ будет неотрицательная пара чисел?

Из первого уравнения выразим переменную $y = 2x + 3$ и подставим ее во второе уравнение. Получаем $3x + 2(2x + 3) = 7a - 1$, или $3x + 4x + 6 = 7a - 1$, или $7x = 7a - 7$.

Разделим все части равенства на число 7 и найдем $x = a - 1$. Используя выражение $y = 2x + 3$, находим $y = 2(a - 1) + 3 = 2a - 2 + 3 = 2a + 1$. При каждом значении параметра a система уравнений имеет единственное решение $x = a - 1$ и $y = 2a + 1$. По условию такие числа должны быть неотрицательны. Число $x = a - 1$ неотрицательно при значениях a, не меньших числа 1 (т. е. $a \geq 1$). При таких значениях a число $y = 2a + 1$ будет положительным. Итак, $a \geq 1$.

IV. Задания на уроках

№ 1068 (а), 1069 (а, в, д), 1070, 1073, 1075, 1077 (а, б), 1078 (а, в).

V. Контрольные вопросы

– Какие системы уравнений называются равносильными?

– Как решить систему уравнений способом подстановки?

VI. Творческие задания

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 2y = 7a - 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + y = 2a + 1, \\ 5x - 3y = 19 - 6a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 3y = 4a + 2, \\ 3x - 2y = a - 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 4y = 2a - 7, \\ x + 3y = 5a + 2. \end{cases}$

(*Ответы:* а) $x = a$, $y = 2a - 1$; б) $x = a - 1$, $y = a + 1$; в) $x = 2$, $y = 2a - 3$; г) $x = 2a - 1$, $y = a + 1$.)

2. При каком значении параметра a решение $(x_0; y_0)$ системы уравнений удовлетворяет условию?

а) $\begin{cases} 6x - 7y = 4a, \\ 2x + y = 8a, \end{cases}$ $x_0 + y_0 > 10$;

б) $\begin{cases} 3x + 2y = 8a - 1, \\ x + 3y = 5a + 2, \end{cases}$ $x_0 + y_0 = -18$;

в) $\begin{cases} 5x + y = 7a - 5, \\ 2x + 3y = 8a - 2, \end{cases}$ $y_0 - 2x_0 > 0$;

г) $\begin{cases} 4x - y = 2a - 4, \\ x + 2y = 5a - 1, \end{cases}$ $2x_0 > y_0$.

(*Ответы:* а) $a > 2$ (решение $x_0 = 3a$, $y_0 = 2a$); б) $a = -6$ (решение $x_0 = 2a - 1$, $y_0 = a + 1$); в) при всех a (решение $x_0 = a - 1$, $y_0 = 2a$); г) нет таких значений a (решение $x_0 = a - 1$, $y_0 = 2a$).)

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1068 (б), 1069 (б, г, е), 1071, 1074, 1076, 1077 (в, г), 1078 (б, г).

Уроки 89–91. Способ сложения

Цель: рассмотреть способ сложения для решения систем линейных уравнений.

Планируемые результаты: научиться применять способ сложения для решения систем линейных уравнений.

Тип уроков: урок изучения нового материала, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Способом подстановки решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 5y = 11, \\ 5x - 2y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 7y = 9a - 5, \\ 3x - 5y = 8 - 2a. \end{cases}$

Вариант 2

Способом подстановки решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 3x + 4y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y = 7a + 6, \\ 4x - 3y = 8 - 2a. \end{cases}$

III. Работа по теме урока

Рассмотрим еще один способ решения систем линейных уравнений – *способ сложения*. При таком способе решения *данная система* уравнений *заменяется равносильной системой, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную.*

Пример 1

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ 4x - 2y = 6. \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что в уравнениях системы коэффициенты при переменной y являются противоположными числами. Сложим почленно правые и левые части уравнений: $3x + 2y + 4x - 2y = 8 + 6$. Получим линейное уравнение с одной переменной x, а именно $7x = 14$. Заменим одно из уравнений системы (1), например первое, полученным уравнением $7x = 14$.

Получим равносильную систему

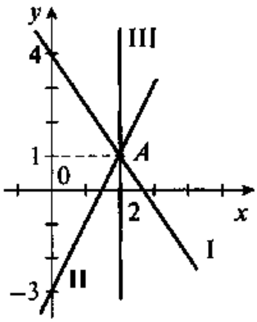
$$\begin{cases} 7x = 14, \\ 4x - 2y = 6. \end{cases} \quad (2)$$

Решим систему (2). Из первого уравнения находим $x = 2$.

Подставим это значение x во второе уравнение системы. Получаем линейное уравнение с переменной y: $4 \cdot 2 - 2y = 6$, или $8 - 2y = 6$, или $-2y = -2$, откуда $y = 1$. Пара чисел (2; 1) – решение системы (2), а следовательно, и равносильной системы (1).

Покажем, что системы (1) и (2) равносильны. Для системы (1) выполняется условие единственности решения: $\frac{3}{4} \neq \frac{2}{-2}$.

Подставив найденное решение системы (2) $x = 2$, $y = 1$, убеждаемся, что оно является и решением системы (1). В равносильности систем (1) и (2) можно убедиться, используя и графический способ. Решим сначала графически систему (1). Построим график уравнения $3x + 2y = 8$ (прямая I) и график уравнения $4x - 2y = 6$ (прямая II). Эти прямые пересекаются в точке A. Координаты данной точки являются решением системы (1).



Теперь графически решим систему (2). Графиком уравнения $7x = 14$ является прямая $x = 2$ (прямая III). Графиком второго уравнения $4x - 2y = 6$ является прямая II. Видно, что прямые II и III пересекаются в той же точке A, т. е. координаты этой точки также будут решением системы (2). Следовательно, системы (1) и (2) равносильны.

Из разобранного примера видно, что *при сложении уравнений* системы *получилось уравнение только с одной переменной. В качестве второго уравнения* системы можно *выбрать любое из уравнений данной системы.* В результате таких преобразований была получена *система, равносильная данной.* В этом состоит суть метода сложения.

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3x - 5y = 9, \\ 2x - 7y = 17 \end{cases}$ способом сложения.

В отличие от предыдушего примера в этом случае коэффициенты при y (а также при x) не являются противоположными числами. Поэтому сложение уравнений не позволит получить уравнение с одной переменной. Следовательно, необходимо добиться того, чтобы в уравнениях коэффициенты при любой переменной, например при y, стали противоположными числами.

Коэффициенты при y являются простыми числами 5 и 7. Поэтому умножим все члены первого уравнения на число 7, второго – на число –5. При этом уравнения являются равносильными, и система также равносильна данной:

$$\begin{cases} 21x - 35y = 63, \\ -10x + 35y = -85. \end{cases}$$

В такой системе коэффициенты при y – противоположные числа. Сложим почленно левые и правые части уравнений системы и получим линейное уравнение с одной переменной: $21x - 35y - 10x + 35y = 63 - 85$ или $11x = -22$.

Запишем систему, равносильную данной. В качестве первого возьмем полученное уравнение, в качестве второго – первое уравнение данной системы. Получаем $\begin{cases} 11x = -22, \\ 3x - 5y = 9. \end{cases}$

Из первого уравнения найдем $x = -2$ и подставим это значение во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одной переменной: $3 \cdot (-2) - 5y = 9$, или $-6 - 5y = 9$, или $-5y = 9 + 6$, или $-5y = 15$, откуда $y = -3$. Итак, данная система уравнений имеет единственное решение $(-2; -3)$.

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases} 6x + 5y = 7, \\ 4x - 3y = 11. \end{cases}$

Избавимся теперь от переменной x. Коэффициенты при x в уравнениях – числа 6 и 4 – уже не являются простыми (это составные числа). Найдем их наименьшее общее кратное: НОК $(6, 4) = 12$. Так как $12 : 6 = 2$ и $12 : 4 = 3$, то умножим все члены первого уравнения на число 2, второго – на число –3. Получаем равносильную систему уравнений $\begin{cases} 12x + 10y = 14, \\ -12x + 9y = -33. \end{cases}$

Сложим почленно левые и правые части уравнений этой системы и получим линейное уравнение с переменной y: $12x + 10y - 12x + 9y = 14 - 33$ или $19y = -19$.

Запишем равносильную систему уравнений. В качестве первого выберем полученное уравнение, в качестве второго – второе уравнение данной системы. Получаем $\begin{cases} 19y = -19, \\ 4x - 3y = 11. \end{cases}$

Из первого уравнения найдем $y = -1$ и подставим это значение во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одной переменной: $4x - 3 \cdot (-1) = 11$ или $4x = 8$, откуда $x = 2$. Итак, данная система уравнений имеет единственное решение $(2; -1)$.

Из рассмотренных примеров следует, что *при решении систем* линейных уравнений *способом сложения*:

1) умножают почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;

2) складывают почленно левые и правые части уравнений системы;

3) решают полученное уравнение с одной переменной;

4) находят соответствующее значение второй переменной.

Отметим, что если в уравнениях системы коэффициенты при одной из переменных являются противоположными числами, то при решении пункт 1 пропускают и начинают сразу с пункта 2.

Способ сложения можно использовать и при решении систем уравнений с параметрами.

Пример 4

Пусть $(x_0; y_0)$ – решение системы $\begin{cases} 2x + 3y = 5a + 4, \\ 4x + 5y = 9a + 6. \end{cases}$

При каких значениях параметра a величина $2x_0 + y_0 \geq 0$?

Сначала решим данную систему способом сложения. Для этого умножим все члены первого уравнения на число -2 и получим равносильную систему $\begin{cases} -4x - 6y = -10a - 8, \\ 4x + 5y = 9a + 6. \end{cases}$

Сложим уравнения системы почленно. Получаем линейное уравнение с одной переменной: $-4x - 6y + 4x + 5y = -10a - 8 + 9a + 6$ или $-y = -a - 2$, откуда $y = a + 2$.

Подставим это значение y, например, в первое уравнение данной системы: $2x + 3(a + 2) = 5a + 4$, или $2x + 3a + 6 = 5a + 4$, или $2x = 5a + 4 - 3a - 6$, или $2x = 2a - 2$, откуда $x = a - 1$.

Итак, для каждого значения параметра a данная система уравнений имеет единственное решение $x_0 = a - 1$, $y_0 = a + 2$.

Найдем величину $2x_0 + y_0 = 2(a - 1) + (a + 2) = 2a - 2 + a + 2 = 3a$.

По условию эта величина должна быть неотрицательной, т. е. $3a \geq 0$. Очевидно, что такое неравенство выполняется только при неотрицательных значениях a, т. е. при $a \geq 0$.

IV. Задания на уроке

№ 1082 (а, в), 1084 (а, б, г), 1085 (в, г), 1087 (а, б), 1088, 1091, 1092 (а), 1093, 1095 (а, б).

V. Контрольные вопросы

- Какова основная цель при решении систем уравнений способом сложения?
- Как решить систему уравнений способом сложения? Объясните на примере.

VI. Творческие задания

- Выполните творческие задания 1 и 2 из предыдущего урока способом сложения.

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1082 (б, г), 1084 (в, д, е), 1085 (а, б), 1087 (в, г), 1089, 1090, 1092 (б), 1094, 1095 (в, г).

Уроки 92, 93. Решение задач с помощью систем уравнений

Цель: рассмотреть решение текстовых задач с помощью систем линейных уравнений.

Планируемые результаты: научиться решать текстовые задачи с помощью систем линейных уравнений.

Тип уроков: урок общеметодологической направленности, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Способом сложения решите систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 5y = 11, \\ 5x - 2y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 7y = 9a - 5, \\ 3x - 5y = 8 - 2a. \end{cases}$

Вариант 2

Способом сложения решите систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 3x + 4y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y = 7a + 6, \\ 4x - 3y = 8 - 2a. \end{cases}$

III. Работа по теме уроков

При решении текстовых задач с помощью систем уравнений:
1) обозначают неизвестные величины буквами;
2) используя условие задачи, составляют систему уравнений;
3) решают полученную систему уравнений;
4) объясняют результат в соответствии с условием задачи.

Пример 1

В трех тетрадях и четырех блокнотах вместе 108 страниц. В двух блокнотах столько же страниц, сколько их в трех тетрадях. Сколько страниц в каждой тетради и в каждом блокноте?

Пусть в каждой тетради x страниц, а в каждом блокноте y страниц. Тогда в трех тетрадях $3x$ страниц, а в четырех блокнотах $4y$ страниц. По условию задачи общее количество страниц в этих тетрадях и блокнотах равно 108. Поэтому получаем первое уравнение: $3x + 4y = 108$.

В двух блокнотах $2y$ страниц, в трех тетрадях $3x$ страниц. По условию задачи эти количества страниц равны. Тогда имеем второе уравнение: $2y = 3x$.

Итак, получили систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} 3x + 4y = 108, \\ 2y = 3x. \end{cases}$

Решим ее, например, способом подстановки. Из второго уравнения выразим переменную $y = \frac{3}{2}x$ и подставим ее в первое уравнение. Получаем $3x + 4 \cdot \frac{3}{2}x = 108$, или $3x + 6x = 108$, или $9x = 108$, откуда $x = 12$. Подставим это значение x в выражение $y = \frac{3}{2}x$ и найдем $y = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18$.

Вернемся к началу задачи и вспомним обозначения. Итак, в тетради 12 страниц, а в блокноте 18 страниц.

Пример 2

Можно ли разменять купюру достоинством 1000 руб. купюрами достоинством 10 руб. и 50 руб., если для размена можно использовать 26 купюр?

Предположим, что для размена использовалось x купюр достоинством 10 руб. и y купюр достоинством 50 руб. По условию для размена можно использовать 26 купюр. Поэтому получаем первое уравнение $x + y = 26$. Учтем, что x купюр достоинством 10 руб. стоят $10x$ руб., а y купюр достоинством 50 руб. стоят $50y$ руб. Тогда общая стоимость этих купюр $10x + 50y$ по условию задачи должна составлять 1000 руб. Имеем второе уравнение: $10x + 50y = 1000$.

Получили систему двух линейных уравнении с двумя неизвестными: $\begin{cases} x + y = 26, \\ 10x + 50y = 1000. \end{cases}$

Решим эту систему способом сложения. Для этого умножим все члены первого уравнения на число (–50) и получим равносильную систему: $\begin{cases} -50x - 50y = -1300, \\ 10x + 50y = 1000. \end{cases}$

Сложим почленно левые и правые части уравнений системы и получим линейное уравнение с одной переменной: $-50x - 50y + 10x + 50y = -1300 + 1000$ или $-40x = -300$, откуда $x = 7{,}5$. Подставим это значение в первое уравнение данной системы: $7{,}5 + y = 26$, откуда $y = 18{,}5$.

Вернемся к нашим обозначениям. Получаем, что для размена надо использовать 7,5 купюры достоинством 10 руб. и 18,5 купюры достоинством 50 руб. По смыслу задачи числа x и y могут быть только натуральными числами или нулем, поэтому разменять купюру достоинством 1000 руб. заданным способом нельзя.

IV. Задания на уроках

№ 1099, 1101, 1103, 1104, 1106, 1108, 1110, 1112, 1114, 1117, 1119, 1120.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1100, 1102, 1105, 1107, 1109, 1111, 1113, 1115, 1116, 1118, 1121, 1122.

Урок 94. Контрольная работа № 9 по теме «Системы линейных уравнений»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко, поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при выполнении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает учащимся некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 к набранным баллам добавляются дополнительно 0,5 балла, за решение задач вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (т. е. оценка «5» выставляется уже за четыре задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Возможно, несколько труднее для учеников задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен ученикам (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий). При наличии такой техники в классе на стенде (после контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов.

Контрольная работа рассчитана на один урок.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Из пар чисел (–2; 1), (2; –1), (1; 2) выберите решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 7x + 4y = 10, \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$

2. Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} y - 2x = 0, \\ y - x = 2 \end{cases}$ графическим способом.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ способом подстановки.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + 4y = 14, \\ 5x + 2y = 14 \end{cases}$ способом сложения.

5. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки A (2; 7) и B (–1; –2). Найдите величины k и b.

6. Пять досок и шесть брусьев весят 107 кг. Четыре доски тяжелее двух брусьев на 4 кг. Сколько весит одна доска и один брус?

Вариант 2

1. Из пар чисел (–2; 1), (–1; 2), (1; 2) выберите решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 5x + 4y = 3, \\ 3x + 6y = 9. \end{cases}$

2. Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} y - x = 0, \\ x + y = 4 \end{cases}$ графическим способом.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x - 3y = -1, \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ способом подстановки.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - 5y = 8, \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$ способом сложения.

5. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки A (2; 7) и B (–1; 1). Найдите величины k и b.

6. Семь досок и три кирпича вместе весят 71 кг. Три доски тяжелее двух кирпичей на 14 кг. Сколько весит одна доска и один кирпич?

Вариант 3

1. Из пар чисел (–2; 1), (3; –1), (2; –2) выберите решение системы нелинейных уравнений $\begin{cases} x^2 + 3|y - 1| = 15, \\ |1 - x| + y^2 = 3. \end{cases}$

2. Решите систему нелинейных уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ y - |x| = -1 \end{cases}$ графическим способом.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2(x + y) - 3(x - y) = 4, \\ 5(x + y) - 7(x - y) = 2 \end{cases}$ способом подстановки.

4. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки A (–1; –5) и B (2; 4). Найдите величины k и b.

5. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases} 2x + 5y = 3, \\ x + ay = 2a. \end{cases}$

6. Решите уравнение $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 5|x - 2y + 3| = 0$.

Вариант 4

1. Из пар чисел (–2; 1), (3; –2), (2; –2) выберите решение системы нелинейных уравнений $\begin{cases} x^2 + 2|y - 1| = 15, \\ |2 - x| + y^2 = 5. \end{cases}$

2. Решите систему нелинейных уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y + |x| = 2 \end{cases}$ графическим способом.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2(x-y)+3(x+y)=39, \\ 3(x-y)-2(x+y)=-13 \end{cases}$ способом подстановки.

4. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A\ (-2;\ 4)$ и $B\ (1;\ -5)$. Найдите величины k и b.

5. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases} 3x+2y=4a, \\ ax+y=3. \end{cases}$

6. Решите уравнение $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 5|3x - y - 6| = 0$.

Вариант 5

1. Система уравнений $\begin{cases} ax+by=11, \\ (b+1)x-ay=9 \end{cases}$ имеет решение $(2;\ 1)$. Найдите числа a и b.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{y+5}=1, \\ \dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{y+5}=5. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} y-|x+1|=0, \\ y+|x|=1 \end{cases}$ графическим способом.

4. Прямые $y = 3 - x$, $y = 2x$, $y = ax - 2$ пересекаются в одной точке. Найдите коэффициент a.

5. Катер прошел путь по течению реки от пункта A до пункта B за 6 ч, а обратный путь – за 8 ч. За сколько часов плот преодолеет путь от пункта A до пункта B?

6. При всех значениях параметра a определите число решений системы $\begin{cases} ax+y=a^3, \\ x+ay=a. \end{cases}$

Вариант 6

1. Система уравнений $\begin{cases} ax+by=7, \\ (2b+1)x+(3a-2)y=19 \end{cases}$ имеет решение $(1;\ 2)$. Найдите числа a и b.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{y+2}=1, \\ \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y+2}=5. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} y - |x - 1| = 0, \\ |x| - y = 1 \end{cases}$ графическим способом.

4. Прямые $y = 3x - 5$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = ax - 3$ пересекаются в одной точке. Найдите коэффициент a.

5. Катер прошел путь по течению реки от пункта A до пункта B за 4 ч, а обратный путь – за 6 ч. За сколько часов плот преодолеет путь от пункта A до пункта B?

6. При всех значениях параметра a определите число решений системы $\begin{cases} x + ay = a^4, \\ ax + y = a^2. \end{cases}$

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности.

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. $(2; -1)$.

2. $(2; 4)$.

3. $(2; 1)$.

4. $(2; 2)$.

5. $y = 3x + 1$.

6. Масса доски 7 кг, бруса – 12 кг.

Вариант 2

1. $(-1; 2)$.

2. $(2; 2)$.

3. $(1; 2)$.

4. $(1; -1)$.

5. $y = 2x + 3$.

6. Масса доски 8 кг, кирпича – 5 кг.

Вариант 3

1. $(3; -1)$.

2. $(-1; 0)$, $(0; -1)$, $(1; 0)$.

3. $(-19; -3)$.

4. $y = 3x - 2$.

5. При $a \neq 2{,}5$ единственное решение, при $a = 2{,}5$ решений нет.

6. $(9; 6)$.

Вариант 4

1. $(3; -2)$.

2. $(-1; 1)$, $(1; 1)$.

3. $(7; 4)$.

4. $y = -3x - 2$.

5. При $a \neq 1{,}5$ единственное решение, при $a = 1{,}5$ бесконечно много решений.

6. $\left(\frac{4}{3}; -2\right)$.

Вариант 5

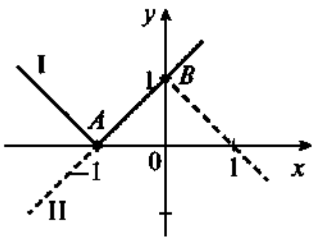
1. Подставим данное решение (2; 1) в систему уравнений $\begin{cases} ax + by = 11, \\ (b+1)x - ay = 9 \end{cases}$ и получим систему линейных уравнений для определения величин a и b: $\begin{cases} 2a + b = 11, \\ (b+1) \cdot 2 - a = 9 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2a + b = 11, \\ -a + 2b = 7. \end{cases}$

Решим эту систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим $b = 11 - 2a$ и подставим это выражение во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одним неизвестным: $-a + 2(11 - 2a) = 7$, или $-a + 22 - 4a = 7$, или $-5a = -15$, откуда $a = 3$. Используя формулу $b = 11 - 2a$, найдем $b = 11 - - 2 \cdot 3 = 11 - 6 = 5$.

(*Ответ:* $a = 3$, $b = 5$.)

2. Систему уравнений $\begin{cases} y - |x+1| = 0, \\ y + |x| = 1 \end{cases}$ запишем в виде $\begin{cases} y = |x+1|, \\ y = 1 - |x|. \end{cases}$

Построим графики функций $y = |x + 1|$ (ломаная I) и $y = 1 - |x|$ (ломаная II). Видно, что графики совпадают по отрезку AB. Следовательно, данная система имеет бесконечно много решений. Запишем их. Отрезок AB расположен на прямой $y = x + 1$, при этом абсцисса любой точки отрезка AB удовлетворяет условию $-1 \le x \le 0$. Поэтому решением данной системы будут пары чисел $(x; y)$, в которых $-1 \le x \le 0$ и $y = x + 1$.



(*Ответ:* $-1 \le x \le 0$, $y = x + 1$.)

3. Система уравнений $\begin{cases} \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{2}{y+5} = 1, \\ \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{y+5} = 5 \end{cases}$ нелинейная. Однако при ее решении также можно использовать способ сложения. Для этого перед слагаемыми, зависящими от y, коэффициенты сделаем противоположными. Умножим первое уравнение почленно на число 3, второе уравнение – на число 2. Получаем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{9}{x-2} - \dfrac{6}{y+5} = 3, \\ \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{6}{y+5} = 10. \end{cases}$

Сложим почленно левые и правые части уравнений системы и получим уравнение с одним неизвестным: $\dfrac{9}{x-2} + \dfrac{4}{x-2} = 3 + 10$ или $\dfrac{13}{x-2} = 13$.

Тогда знаменатель дроби $x - 2 = 1$, откуда $x = 3$. Подставим это значение, например, в первое уравнение и получим $\dfrac{3}{3-2} - \dfrac{2}{y+5} = 1$, или $3 - \dfrac{2}{y+5} = 1$, или $2 = \dfrac{2}{y+5}$.

Тогда знаменатель дроби $y + 5 = 1$, откуда $y = -4$. Итак, система имеет единственное решение $(3; -4)$.

(*Ответ:* $(3; -4)$.)

4. Пусть данные прямые пересекаются в точке $A\ (x_0;\ y_0)$. Тогда координаты этой точки удовлетворяют уравнениям прямых. Получаем систему уравнений с параметром a:

$$\begin{cases} y_0 = 3 - x_0, \\ y_0 = 2x_0, \\ y_0 = ax_0 - 2. \end{cases}$$

Первые два уравнения не содержат параметра a. Поэтому сначала решим систему, образованную этими уравнениями:

$$\begin{cases} y_0 = 3 - x_0, \\ y_0 = 2x_0. \end{cases}$$

Для ее решения используем еще один способ – способ сравнения. Так как в этих уравнениях равны левые части, то можно приравнять и правые. Получаем линейное уравнение с одним неизвестным: $3 - x_0 = 2x_0$ или $3 = 3x_0$, откуда $x_0 = 1$.

Из первого уравнения этой системы находим $y_0 = 3 - 1 = 2$.

Итак, первые две прямые пересекаются в точке $A\ (1;\ 2)$. Подставим найденные значения x_0 и y_0 в третье уравнение данной системы и получим $2 = a \cdot 1 - 2$ или $2 = a - 2$, откуда $a = 4$.

(*Ответ:* $a = 4$.)

5. Пусть расстояние между пунктами A и B равно S км, собственная скорость катера (скорость в стоячей воде) равна x км/ч, а скорость течения реки – y км/ч. При движении по течению реки скорость катера увеличивается и равна $x + y$ км/ч. За 6 ч катер, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x + y) \cdot 6$, равное S. Получаем первое уравнение: $6(x + y) = S$. При движении против течения реки скорость катера уменьшается и равна $x - y$ км/ч. За 8 ч катер, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x - y) \cdot 8$, равное S. Имеем второе уравнение: $8(x - y) = S$.

Получим систему уравнений $\begin{cases} 6(x+y) = S, \\ 8(x-y) = S \end{cases}$ или $\begin{cases} 6x + 6y = S, \\ 8x - 8y = S. \end{cases}$

Особенность этой системы в том, что в нее входят три неизвестных и два уравнения и найти эти неизвестные нельзя. Плот может двигаться только со скоростью реки y км/ч. Поэтому способом сложения исключим из данной системы переменную x. Для этого умножим почленно первое уравнение на число 4, второе уравнение – на число -3. Получаем равносильную систему уравнений $\begin{cases} 24x + 24y = 4S, \\ -24x + 24y = -3S. \end{cases}$

Сложим почленно левые и правые части уравнений системы и получим $24y + 24y = 4S - 3S$ или $48y = S$.

Плот пройдет расстояние S со скоростью y за время $\frac{S}{y} = \frac{48y}{y} = 48$ (ч).

(*Ответ:* за 48 ч.)

6. Для системы уравнений $\begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = a \end{cases}$ запишем условие единственности решения: $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a}$, или $a^2 - 1 \neq 0$, или $(a - 1)(a + 1) \neq 0$, откуда $a \neq 1$ и $a \neq -1$. При $a \neq \pm 1$ система имеет единственное решение. Определим число решений системы при $a = -1$ и $a = 1$. Подставим значение $a = -1$ в данную систему и получим $\begin{cases} -x + y = (-1)^3, \\ x - y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} -x + y = -1, \\ x - y = -1. \end{cases}$

Умножим первое уравнение почленно на число -1. Получаем равносильную систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - y = -1. \end{cases}$

Очевидно, что такая система решений не имеет, так как одна и та же величина $x - y$ из первого уравнения равна 1, из второго уравнения – равна -1.

Подставим значение $a = 1$ в данную систему и получим $\begin{cases} x + y = 1^3, \\ x + y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

Такая система уравнений имеет бесконечно много решений, так как уравнения системы одинаковы.

(*Ответ:* при $a \neq \pm 1$ единственное решение, при $a = -1$ решений нет, при $a = 1$ бесконечно много решений.)

Вариант 6

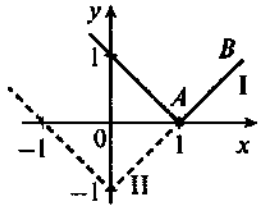
1. Подставим данное решение (1; 2) в систему уравнений $\begin{cases} ax + by = 7, \\ (2b + 1)x + (3a - 2)y = 19 \end{cases}$ и получим систему линейных уравнений для определения величин a и b: $\begin{cases} a + 2b = 7, \\ (2b + 1) \cdot 1 + (3a - 2) \cdot 2 = 19 \end{cases}$ или $\begin{cases} a + 2b = 7, \\ 6a + 2b = 22. \end{cases}$

Решим эту систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим $a = 7 - 2b$ и подставим это выражение во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одним неизвестным: $6(7-2b)+2b=22$, или $42-12b+2b=22$, или $-10b=-20$, откуда $b=2$. Используя формулу $a=7-2b$, найдем $a=7-2\cdot 2=$ $=7-4=3$.

(*Ответ:* $a=3$, $b=2$.)

2. Систему уравнений $\begin{cases} y-|x-1|=0, \\ |x|-y=1 \end{cases}$ запишем в виде $\begin{cases} y=|x-1|, \\ y=|x|-1. \end{cases}$

Построим графики функций $y=|x-1|$ (ломаная I) и $y=|x|-1$ (ломаная II). Видно, что графики совпадают по лучу AB. Следовательно, данная система имеет бесконечно много решений. Запишем их. Луч AB расположен на прямой $y=x-1$, при этом абсцисса любой точки луча AB удовлетворяет условию $x\ge 1$. Поэтому решением данной системы будут пары чисел (x, y), в которых $x\ge 1$ и $y=x-1$.



(*Ответ:* $x\ge 1$, $y=x-1$.)

3. Система уравнений $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{y+2}=1, \\ \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y+2}=5 \end{cases}$ нелинейная. Однако при ее решении также можно использовать способ сложения. Для этого перед слагаемыми, зависящими от y, коэффициенты сделаем противоположными. Умножим первое уравнение почленно на число 2, второе уравнение – на число 3. Получаем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{8}{x-1}-\dfrac{6}{y+2}=2, \\ \dfrac{9}{x-1}+\dfrac{6}{y+2}=15. \end{cases}$

Сложим почленно левые и правые части уравнений системы и получим уравнение с одним неизвестным: $\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{9}{x-1}=2+15$ или $\dfrac{17}{x-1}=17$.

Тогда знаменатель дроби $x - 1 = 1$, откуда $x = 2$. Подставим это значение, например, в первое уравнение: $\frac{4}{2-1} - \frac{3}{y+2} = 1$, или $4 - \frac{3}{y+2} = 1$, или $3 = \frac{3}{y+2}$.

Тогда знаменатель дроби $y + 2 = 1$, откуда $y = -1$. Итак, система имеет единственное решение $(2; -1)$.

(*Ответ:* $(2; -1)$.)

4. Пусть данные прямые пересекаются в точке A $(x_0; y_0)$. Тогда координаты этой точки удовлетворяют уравнениям прямых. Получаем систему уравнений с параметром a:

$$\begin{cases} y_0 = 3x_0 - 5, \\ y_0 = \frac{1}{2}x_0, \\ y_0 = ax_0 - 3. \end{cases}$$

Первые два уравнения не содержат параметра a. Поэтому сначала решим систему, образованную этими уравнениями:

$$\begin{cases} y_0 = 3x_0 - 5, \\ y_0 = \frac{1}{2}x_0. \end{cases}$$

Для ее решения используем еще один способ – способ сравнения. Так как в этих уравнениях равны левые части, то можно приравнять и правые. Получаем линейное уравнение с одним неизвестным: $3x_0 - 5 = \frac{1}{2}x_0$ или $6x_0 - 10 = x_0$, откуда $x_0 = 2$.

Из первого уравнения этой системы находим $y_0 = 3 \cdot 2 - 5 = = 6 - 5 = 1$.

Итак, первые две прямые пересекаются в точке A $(2; 1)$. Подставим найденные значения x_0 и y_0 в третье уравнение данной системы и получим $1 = a \cdot 2 - 3$ или $1 = 2a - 3$, откуда $a = 2$.

(*Ответ:* $a = 2$.)

5. Пусть расстояние между пунктами A и B равно S км, собственная скорость катера (скорость в стоячей воде) равна x км/ч, а скорость течения реки – y км/ч. При движении по течению реки скорость катера увеличивается и равна $x + y$ км/ч. За 4 ч катер, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x + y) \cdot 4$, равное S. Получаем первое уравнение: $4(x + y) = S$. При движении против течения реки скорость катера уменьшается и равна $x - y$ км/ч. За 6 ч катер, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x - y) \cdot 6$, равное S. Имеем второе уравнение: $6(x - y) = S$.

Получим систему уравнений $\begin{cases} 4(x+y)=S, \\ 6(x-y)=S \end{cases}$ или $\begin{cases} 4x+4y=S, \\ 6x-6y=S. \end{cases}$

Особенность этой системы в том, что в нее входят три неизвестных и два уравнения и найти эти неизвестные нельзя. Плот может двигаться только со скоростью реки y км/ч. Поэтому способом сложения исключим из этой системы переменную x. Для этого умножим почленно первое уравнение на число 3, второе уравнение – на число –2. Получаем равносильную систему уравнений: $\begin{cases} 12x+12y=3S, \\ -12x+12y=-2S. \end{cases}$

Сложим почленно левые и правые части уравнений системы и получим $12y + 12y = 3S - 2S$ или $24y = S$. Плот пройдет расстояние S со скоростью y за время $\frac{S}{y}=\frac{24y}{y}=24$ (ч).

(*Ответ:* за 24 ч.)

6. Для системы уравнений $\begin{cases} x+ay=a^4, \\ ax+y=a^2 \end{cases}$ запишем условие единственности решения: $\frac{1}{a}\neq\frac{a}{1}$, или $1\neq a^2$, или $0\neq a^2-1$, или $0\neq(a-1)(a+1)$, откуда $a\neq 1$ и $a\neq -1$. При $a\neq\pm1$ система имеет единственное решение. Определим число решений системы при $a=-1$ и $a=1$. Подставим значение $a=-1$ в данную систему и получим $\begin{cases} x-y=(-1)^4, \\ -x+y=(-1)^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-y=1, \\ -x+y=1. \end{cases}$

Умножим второе уравнение почленно на число –1. Получаем равносильную систему уравнений $\begin{cases} x-y=1, \\ x-y=-1. \end{cases}$

Очевидно, что такая система решений не имеет, так как одна и та же величина $x-y$ из первого уравнения равна 1, из второго уравнения – равна –1.

Подставим значение $a = 1$ в данную систему и получим $\begin{cases} x+y=1^4, \\ x+y=1^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=1. \end{cases}$

Такая система уравнений имеет бесконечно много решений, так как уравнения системы одинаковы.

(*Ответ:* при $a\neq\pm1$ единственное решение, при $a=-1$ решений нет, при $a=1$ бесконечно много решений.)

VI. Подведение итогов урока

Факультативный урок.
Нелинейные уравнения с двумя переменными

Цель: дать представление о нелинейных уравнениях с двумя переменными.

Планируемые результаты: научиться решать простейшие нелинейные уравнения с двумя переменными.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

В курсе алгебры, помимо линейных уравнений с двумя переменными, рассматриваются и *нелинейные уравнения с двумя переменными*. К таким уравнениям относят те, в которых хотя бы *одна из переменных входит в степени выше первой*. Уравнения, *содержащие знаки модуля*, также будем относить *к нелинейным уравнениям*.

Пример 1

Нелинейным является уравнение:

а) $2x + |y - 1| = 3$, так как содержит модуль величины $y - 1$;

б) $x^2 + 3x - 7y = 1$, так как содержит квадрат величины x;

в) $x + y - xy = 5$, так как содержит произведение xy – одночлен второй степени.

Количество решений нелинейного уравнения с двумя переменными может быть различным.

Пример 2

Рассмотрим уравнение $2(x - 1)^2 + 3(y + 2)^2 = -5$. Очевидно, что при любых значениях переменных x и y квадраты величин $x - 1$ и $y + 2$ будут неотрицательными. При умножении их на положительные числа 2 и 3 произведения также неотрицательные. Сумма таких неотрицательных величин тоже неотрицательна. Поэтому левая часть данного уравнения при всех значениях переменных x и y неотрицательна и не может равняться отрицательному числу –5, стоящему в правой части. Следовательно, это уравнение решений не имеет.

Пример 3

Рассмотрим уравнение $|2x - 3| + |4y - 5| = 0$. В соответствии со свойством модуля величины он имеет только неотрицательные значения. Сумма двух неотрицательных выражений также неотрицательна и будет равняться нулю, если каждое из них равно нулю. Получаем уравнения $|2x - 3| = 0$ и $|4y - 5| = 0$.

Если модуль величины равен нулю, то и сама величина равна нулю. Получаем два линейных уравнения $2x - 3 = 0$ (откуда

$x = \frac{3}{2}$) и $4y - 5 = 0$ (откуда $y = \frac{5}{4}$). Итак, данное уравнение имеет единственное решение $x = \frac{3}{2}$ и $y = \frac{5}{4}$, или $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right)$.

Пример 4

Рассмотрим уравнение $x^4 - 2x^2 + |y - 2| + 1 = 0$. Выделим квадрат разности и получим $(x^4 - 2x^2 + 1) + |y - 2| = 0$ или $(x^2 - 1)^2 + |y - 2| = 0$. Выражения $(x^2 - 1)^2$ и $|y - 2|$ неотрицательны. Сумма этих неотрицательных величин будет равняться нулю, если каждое из них равно нулю. Получаем уравнения $(x^2 - 1)^2 = 0$ и $|y - 2| = 0$ или $x^2 - 1 = 0$ и $y - 2 = 0$ (откуда $y = 2$).

Для решения первого уравнения разложим его левую часть на множители, используя формулу разности квадратов: $(x - 1)(x + 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, т. е. $x - 1 = 0$ (откуда $x = 1$) и $x + 1 = 0$ (тогда $x = -1$). Таким образом, данное уравнение имеет два решения: (1; 2) и (–1; 2).

Пример 5

Рассмотрим уравнение $3y + 2x^2 = 5$. Выразим из него неизвестное y и получим $3y = 5 - 2x^2$ или $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x^2$.

Очевидно, что для любого выбранного значения x по этой формуле можно найти значение y. Например:

при $x = 1$ получаем $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \cdot 1^2 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1$,

при $x = 2$ получаем $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \cdot 2^2 = \frac{5}{3} - \frac{8}{3} = -1$ и т. д.

Итак, мы нашли решения (1; 1), (2; –1). Очевидно, что данное уравнение имеет бесконечно много решений.

Достаточно часто встречаются ***нелинейные уравнения с параметрами.***

Пример 6

При каком значении параметра a уравнение $3ax^2 + 2y^3 + ax + ay = 17$ имеет решение (2; 1)?

Так как решение данного уравнения известно, то при его подстановке в уравнение получаем верное равенство $3a \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^3 + a \cdot 2 + a \cdot 1 = 17$ или $12a + 2 + 2a + a = 17$.

Приведем подобные члены и получим $15a + 2 = 17$, или $15a = 17 - 2$, или $15a = 15$, откуда $a = 1$.

Пример 7

Определим значение параметра a, при котором уравнение $3x^2 + x - 4y + 6 = 0$ имеет решение $(a - 1; a + 2)$, и найдем это решение.

Подставим заданное решение в данное уравнение и получим верное равенство $3(a-1)^2+(a-1)-4(a+2)+6=0$, или $3a^2-6a+3+a-1-4a-8+6=0$, или $3a^2-9a=0$.

Разложим левую часть уравнения на множители: $3a(a-3)=0$.

Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, т. е. $a=0$ или $a-3=0$ (тогда $a=3$). Для каждого из двух найденных значений a определим решение данного уравнения, подставив a в решение $(a-1;\ a+2)$. При $a=0$ получаем $(-1;\ 2)$, при $a=3$ получаем $(2;\ 5)$.

Пример 8

При каком значении параметра a решением уравнения $2ax^2-3x^2-9y+6ay+6x-4ax=0$ будет любая пара чисел?

Задачу можно решить двумя способами.

1-й способ

По условию решением данного уравнения будет любая пара чисел. Пусть этим решением будет, например, пара чисел $(1;\ 1)$. Подставим эти числа в уравнение и получим $2a\cdot1^2-3\cdot1^2-9\cdot1+6a\cdot1+6\cdot1-4a\cdot1=0$, или $2a-3-9+6a+6-4a=0$, или $4a-6=0$, откуда $a=1{,}5$.

Подставим это значение в уравнение и получим $2\cdot1{,}5x^2-3x^2-9y+6\cdot1{,}5y+6x-4\cdot1{,}5\cdot x=0$ или $0\cdot x^2+0\cdot y+0\cdot x=0$.

Очевидно, что любые числа x и y являются решением этого уравнения.

2-й способ

Сгруппируем члены данного уравнения и вынесем обший множитель за скобки. Получаем $(2ax^2+6ay-4ax)+(-3x^2-9y+6x)=0$, или $2a(x^2+3y-2x)-3(x^2+3y-2x)=0$, или $(x^2+3y-2x)(2a-3)=0$.

Очевидно, что это произведение будет равно нулю при всех значениях x и y, если второй множитель равен нулю, т. е. $2a-3=0$, откуда $a=1{,}5$.

III. Задания на уроке и на дом

1. Решите уравнение с двумя неизвестными:

а) $|x-1|+|y+2|=0$;
б) $|2x-3|=-|3y+4|$;
в) $|x-2y|+(x-2)^2=0$;
г) $|x-y+1|=-(y+1)^2$;
д) $(x-3y+1)^2+(x+3)^2=0$;
е) $(2y+x-2)^2+(x+2)^2=0$;
ж) $x^2-6x+y^2-4y+13=0$;
з) $2x^2-8x+y^2+6y+17=0$.

(*Ответы:* а) $(1;\ -2)$; б) $\left(1{,}5;-\dfrac{4}{3}\right)$; в) $(2;\ 1)$; г) $(-2;\ -1)$; д) $\left(-3;-\dfrac{2}{3}\right)$; е) $(-2;\ 2)$; ж) $(3;\ 2)$; з) $(2;\ -3)$.)

2. Определите значение параметра a, при котором данное уравнение имеет заданное решение. Найдите это решение.

а) $3x + 5y = 26$ $(a; 2a)$;
б) $5x - 2y = 11$ $(3a; 2a)$;
в) $2x + 3y = 14$ $(a + 1; a - 1)$;
г) $6x - 5y = 23$ $(a + 2; -a)$;
д) $x^2 + 4y = 0$ $(2a; a)$;
е) $x^2 + x - 5y = 7$ $(a + 1; a - 1)$;
ж) $2x^2 + 3y^2 - 4y = 7$ $(a + 2; a + 1)$;
з) $3x^2 + y^2 + 11y = 12$ $(2a; a + 1)$.

(*Ответы:* а) $a = 2$ $(2; 4)$; б) $a = 1$ $(3; 2)$; в) $a = 3$ $(4; 2)$; г) $a = 1$ $(3; -1)$; д) $a = 0$ $(0; 0)$, $a = -1$ $(-2; -1)$; е) $a = 0$ $(1; -1)$, $a = 2$ $(3; 1)$; ж) $a = 0$ $(2; 1)$, $a = -2$ $(0; -1)$; з) $a = 0$ $(0; 1)$, $a = -1$ $(-2; 0)$.)

3. Найдите значение параметра a, при котором данное уравнение имеет заданное решение:

а) $3x + 2ay = 5a$ $(2; 1)$;
б) $2ax - 3y = 6a$ $(2; -3)$;
в) $ax^2 + 7y^2 + 2x = 3a$ $(-1; 3)$;
г) $2x^3 - 7ay + 5ax = 8$ $(1; 2)$.

(*Ответы:* а) $a = 2$; б) $a = 4{,}5$; в) $a = 30{,}5$; г) $a = -\frac{2}{3}$.)

4. Найдите значение параметра a, при котором решением данного уравнения будет любая пара чисел:

а) $ax - x + 5ay - 5y = 2a - 2$;
б) $ax + 3x + 2ay + 6y = a + 3$;
в) $ax^2 + 5ay^2 + x^2 = 2a + 2 - 5y^2$;
г) $3ax + 4ay^2 + 4y = 2ay + 8y^2 + 6x$.

(*Ответы:* а) $a = 1$; б) $a = -3$; в) $a = -1$; г) $a = 2$.)

IV. Контрольные вопросы

– Какое уравнение называется нелинейным? Приведите примеры.
– Что называется решением нелинейного уравнения с двумя переменными?
– Сколько решений может иметь нелинейное уравнение с двумя переменными?

V. Подведение итогов урока

Факультативный урок. График нелинейного уравнения с двумя переменными

Цель: дать представление о графиках некоторых нелинейных уравнений с двумя переменными.

Планируемые результаты: научиться строить графики простейших нелинейных уравнений.

Тип урока: урок-лекция, урок изучения нового материала.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите уравнение $|2x - 1| = -y^2 + 6y - 9$.

2. При каком значении величины a уравнение $3x^2 + 5y = 3a^2 - 13$ имеет решение $x = a + 1$, $y = 2a$? Найдите это решение.

3. Докажите, что уравнение $|2x - 3y + 1| + 8x^2 = -y^2 - 1$ не имеет решений.

Вариант 2

1. Решите уравнение $|3y + 1| = -x^2 + 4x - 4$.

2. При каком значении величины a уравнение $2x + 5y^2 = 20a^2 - 9$ имеет решение $x = 3a$, $y = 2a - 1$? Найдите это решение.

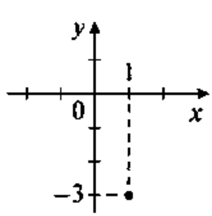
3. Докажите, что уравнение $|5x - y + 3| + 2x^2 = -3y^2 - 3$ не имеет решений.

III. Работа по теме урока

В случае *нелинейного уравнения* с двумя переменными *определение графика остается таким же*, как и ранее. Поэтому ограничимся рассмотрением графиков некоторых типичных уравнений.

Пример 1

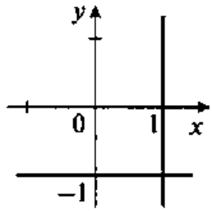
Рассмотрим уравнение $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0$. Очевидно, что при всех значениях переменных x и y квадраты величин $x - 1$ и $y + 3$ неотрицательны. Сумма двух неотрицательных величин может равняться нулю только в том случае, когда каждая из них равна нулю, т. е. $(x - 1)^2 = 0$ и $(y + 3)^2 = 0$. Квадрат величины равняется нулю, если сама величина равна нулю. Получаем уравнения $x - 1 = 0$ и $y + 3 = 0$. Решаем эти линейные уравнения с одной переменной и находим $x = 1$ и $y = -3$. Итак, решением данного уравнения является только пара чисел $(1; -3)$. Изобразим точку A с такими координатами на плоскости и получим график данного уравнения. В этом случае график представляет собой единственную точку на координатной плоскости.



Пример 2

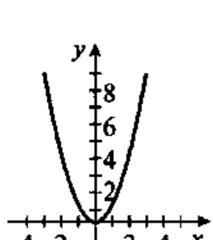
Рассмотрим уравнение $xy + x - y - 1 = 0$. Сгруппируем члены, разложим его левую часть на множители и получим $(xy + x) - (y + 1) = 0$, или $x(y + 1) - (y + 1) = 0$, или $(y + 1)(x - 1) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из таких множителей равен нулю, т. е. $y + 1 = 0$ (откуда $y = -1$) или $x - 1 = 0$ (откуда $x = 1$). Построим прямые $y = -1$ (горизонтальная прямая) и $x = 1$ (вертикальная прямая) на координатной плоскости.

Точки, расположенные на этих прямых, являются решением уравнения. Поэтому построенные прямые – график данного уравнения.



Пример 3

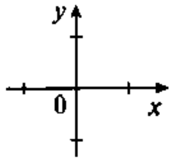
Рассмотрим уравнение $xy(y - x^2) = 0$. Произведение трех множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, т. е. $x = 0$, или $y = 0$, или $y - x^2 = 0$ (откуда $y = x^2$). Построим прямые $x = 0$ (ось ординат) и $y = 0$ (ось абсцисс). Также построим график квадратичной функции $y = x^2$ (параболу). Таким образом, график данного уравнения – оси координат и парабола.



Пример 4

Рассмотрим уравнение $(x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$. Учитывая формулу квадрата разности, получаем, что левая часть уравнения равна правой при всех значениях переменных x и y.

Тогда любая пара чисел $(x; y)$ является решением данного уравнения. Поэтому графиком данного уравнения является координатная плоскость.



Пример 5

Рассмотрим уравнение $(3x + 2y - 5)^2 + |2x - y + 1| + 3 = 0$. Левая часть уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных величин $(3x + 2y - 5)^2$ и $|2x - y + 1|$ и положительного числа 3. Поэтому такая сумма не меньше числа 3 и равняться нулю не может. Следовательно, данное уравнение решений не имеет и его график не существует.

IV. Задания на уроке и на дом

1. Постройте график нелинейного уравнения с двумя переменными:

а) $|2x - 1| + |y + 2| + 1 = 0$;
б) $|5x - 3| + |3y + 2x - 1| + 4 = 0$;
в) $|2x - 4| + |y - 1| = 0$;
г) $|x + 3| + 4|y - 2| = 0$;
д) $|x - 1| + |2y + x - 3| = 0$;
е) $|3x - y + 1| + |y + 2| = 0$;
ж) $|x^2 - 1| + |y - 2| = 0$;
з) $2|x + 3| + 3|y^2 - 4| = 0$;
и) $|x^2 - 1| + |y^2 - 4| = 0$;
к) $5|x^2 - 9| + 2|y^2 - 1| = 0$.

(*Ответы:* а, б) графика нет; в) точка $A\ (2; 1)$; г) точка $A\ (-3; 2)$; д) точка $A\ (1; 1)$; е) точка $A\ (-1; -2)$; ж) точки $A\ (1; 2)$ и $B\ (-1; 2)$; з) точки $A\ (-3; -2)$ и $B\ (-3; 2)$; и) точки $A\ (-1; -2)$, $B\ (-1; 2)$, $C\ (1; -2)$, $D\ (1; 2)$; к) точки $A\ (-3; -1)$, $B\ (-3; 1)$, $C\ (3; -1)$, $D\ (3; 1)$.)

2. Постройте график нелинейного уравнения с двумя переменными:

а) $(x - 2)(y + 3) = 0$;
б) $(2x - 3)(3y + 5) = 0$;
в) $(x - 1)(y + 2x - 3) = 0$;
г) $(2x + y - 1)(3y - x + 2) = 0$;
д) $3xy + 6x - y - 2 = 0$;
е) $2xy + x - 6y - 3 = 0$;
ж) $y^2 - x^2 = 0$;
з) $4y^2 - 9x^2 = 0$;
и) $y^2 - x^4 = 0$;
к) $y^2 + x^4 = 0$.

(*Ответы:* а) прямые $x = 2$ и $y = -3$; б) прямые $x = \frac{3}{2}$ и $y = -\frac{5}{3}$; в) прямые $x = 1$ и $y = -2x + 3$; г) прямые $y = -2x + 1$ и $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$; д) прямые $x = \frac{1}{2}$ и $y = -2$; е) прямые $x = 3$ и $y = -\frac{1}{2}$; ж) прямые

$y = -x$ и $y = x$; з) прямые $y = -1{,}5$ и $x = 1{,}5x$; и) параболы $y = x^2$ и $y = -x^2$; к) точка A (0; 0).)

3. Постройте график нелинейного уравнения с двумя переменными:

а) $y - |x| = 0$;
б) $y + |x| = 1$;
в) $|y| - |x| = 0$;
г) $|y| + |x| = 2$;
д) $|x| - |y| = 2$;
е) $|y| - |x| = 2$;
ж) $2|x| + |y| = 6$;
з) $|x| + 2|y| = 6$;
и) $|x| - 2|y| = 3$;
к) $2|x| - |y| = 3$;
л) $|y| - 2|x| = 3$;
м) $2|y| - |x| = 3$.

V. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Некоторые системы нелинейных уравнений

Цель: познакомить с простейшими системами нелинейных уравнений.

Планируемые результаты: изучить разные способы решения простейших систем нелинейных уравнений.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Постройте график уравнения:

а) $2x^2 - 3x = 0$; б) $(y - |x|)(y + 2) = 0$.

2. На координатной плоскости изобразите множество точек, которое задает неравенство $|y + x + 3| \le 1$.

Вариант 2

1. Постройте график уравнения:

а) $2y^2 + 5y = 0$; б) $(y + |x|)(x - 3) = 0$.

2. На координатной плоскости изобразите множество точек, которое задает неравенство $|y - x + 1| \le 2$.

III. Работа по теме урока

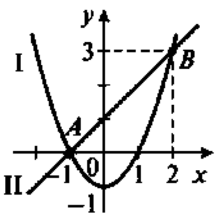
При решении систем нелинейных уравнений используются те же способы, что и при решении систем линейных уравнений: *графический способ*, *способ подстановки* и *способ сложения*.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ y - x = 1 \end{cases}$ графическим способом.

Из каждого уравнения системы выразим переменную y через переменную x. Получаем равносильную систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = x + 1. \end{cases}$

Построим график функции $y = x^2 - 1$ (парабола I) и график функции $y = x + 1$ (прямая II). Видно, что графики пересекаются в двух точках A и B. Следовательно, данная система имеет два решения. На рисунке найдем координаты этих точек A $(-1; 0)$ и B $(2; 3)$. Поэтому решения данной системы $(-1; 0)$ и $(2; 3)$.



Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} y + |x| = 4, \\ 3y + x^2 = 12 \end{cases}$ способом подстановки.

Из первого уравнения системы выразим переменную y через переменную x. Получим выражение $y = 4 - |x|$ и подставим его во второе уравнение. Имеем нелинейное уравнение с одним неизвестным: $3(4 - |x|) + x^2 = 12$, или $12 - 3|x| + x^2 = 12$, или $x^2 - 3|x| = 0$.

Учтем свойство модуля $x^2 = |x|^2$ и запишем уравнение в виде $|x|^2 - 3|x| = 0$. Разложим его левую часть на множители: $|x| \cdot (|x| - 3) = 0$.

Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения $|x| = 0$ (так как модуль величины x равен нулю, то и сама величина $x = 0$) и $|x| - 3 = 0$ (откуда $|x| = 3$, тогда величина $x = 3$ или $x = -3$). Для каждого значения x по формуле $y = 4 - |x|$ найдем соответствующее значение y. Получаем при $x = 0$ $y = 4$, при $x = \pm 3$ $y = 4 - 3 = 1$.

Итак, данная система уравнений имеет три решения $(0; 4)$, $(3; 1)$ и $(-3; 1)$.

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2y^2 + 3|x| = 5, \\ 3y - 2|x| = 1 \end{cases}$ способом сложения.

Умножим первое уравнение почленно на число 2, второе уравнение – на число 3 и получим равносильную систему уравнений $\begin{cases} 4y^2 + 6|x| = 10, \\ 9y - 6|x| = 3. \end{cases}$

Сложим левые и правые части уравнений системы и получим квадратное уравнение с одной переменной $4y^2 + 9y = 13$ или $4y^2 + 9y - 13 = 0$. Решим это уравнение, разложив его левую часть на множители.

Для этого представим $9y$ в виде $9y = 13y - 4y$, сгруппируем члены уравнения и вынесем общие множители за скобки. Получаем $4y^2 + 13y - 4y - 13 = 0$, или $y(4y + 13) - (4y + 13) = 0$, или $(4y + 13)(y - 1) = 0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то один из множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения $4y + 13 = 0$ (корень $y = -\frac{13}{4}$) и $y - 1 = 0$ (корень $y = 1$).

Для каждого значения y найдем соответствующее значение x из второго уравнения $3y - 2|x| = 1$ данной системы. При $y = -\frac{13}{4}$ получаем $3 \cdot \left(-\frac{13}{4}\right) - 2|x| = 1$ или $-\frac{39}{4} - 2|x| = 1$.

Выразим из этого уравнения $|x| = -\frac{43}{8}$. Так как модуль любой величины – неотрицательное число, то такое уравнение решений не имеет. При $y = 1$ имеем $3 - 2|x| = 1$, откуда $|x| = 1$. Поэтому сама величина $x = 1$ или $x = -1$.

Итак, данная система уравнений имеет два решения $(1; 1)$ и $(-1; 1)$.

Аналогичным способом решают системы уравнений с параметрами.

Пример 4

Решим систему $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x - ay = 1, \end{cases}$ например, методом сложения.

Умножим второе уравнение почленно на число -1 и получим $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -2x + ay = -1. \end{cases}$

Сложим левые и правые части уравнений системы и получим $2x - y - 2x + ay = 1 - 1$ или $ay - y = 0$.

Вынесем за скобки общий множитель: $y(a-1)=0$.

Так как произведение двух множителей обращается в нуль, то возможны два случая:

1) $y=0$; подставив это значение в уравнения данной системы, получаем $\begin{cases}2x=1,\\2x=1,\end{cases}$ откуда $x=\frac{1}{2}$;

2) $a-1=0$, т. е. $a=1$; подставим это значение a в данную систему и получим $\begin{cases}2x-y=1,\\2x-y=1.\end{cases}$

Очевидно, что такая система имеет бесконечно много решений: $y=2x-1$ (где x — любое число).

Итак, если $a\neq 1$, то система имеет единственное решение $x=\frac{1}{2}$, $y=0$; если $a=1$, то система имеет бесконечно много решений: x, $y=2x-1$ (где x — любое число).

В некоторых случаях при исследовании корней уравнения его удобно заменить системой уравнений и использовать графический способ.

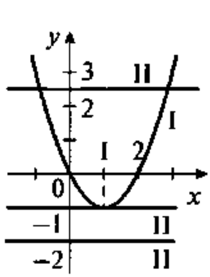
Пример 5

В зависимости от параметра a определим количество корней уравнения $x^2-2x-a=0$.

Запишем данное уравнение в виде $x^2-2x=a$ и рассмотрим функции $y=x^2-2x$ и $y=a$ или систему уравнений $\begin{cases}y=x^2-2x,\\y=a.\end{cases}$

Изобразим графики этих функций (или графики уравнений системы). Графиком функции $y=x^2-2x$ является парабола I. Ее можно построить, составив таблицу значений данной функции. Так как данная функция не зависит от параметра a, то при изменении этого параметра ее график не меняется.

Графиком функции $y=a$ является прямая II, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $(0;\ a)$. При изменении параметра a прямая II перемещается параллельно самой себе вдоль оси ординат.



На рисунке видно, что при $a < -1$ парабола и прямая не пересекаются и данное уравнение корней не имеет. При $a = -1$ парабола и прямая имеют одну общую точку и уравнение имеет один корень. При $a > -1$ парабола и прямая пересекаются в двух точках и уравнение имеет два корня.

IV. Задания на уроке и на дом

1. Решите систему уравнений всеми изученными способами (графическим способом, способом подстановки, способом сложения):

а) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + 2x - y = 0, \\ y + x = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ |x| - y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x - 1| - y = 0, \\ x - y = -1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} y + x^2 = 0, \\ y - |x| = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x + 1| - y = 0, \\ x + y = 3; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y - |x - 1| = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$ к) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ y - |x - 2| = 0. \end{cases}$

(*Ответы:* а) (0; 0), (1; 1); б) (0; 0), (−1; −1); в) (0; 1); г) (1; 2); д) (0; 0), (3; 3); е) (0; 0), (−3; −3); ж) (0; 0), (−1; 1), (1; 1); з) (0; 0); и) (1; 1), (−2; 4); к) (1; 1).)

2. Используя графический способ, найдите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ y - x^2 = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y - |x| = 0, \\ x^2 - y = 1; \end{cases}$ и) $\begin{cases} |x - 1| - y = 0, \\ x - y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y + |x| = 0, \\ y - |x - 1| = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y - |x| = 1, \\ x^2 - y = 0; \end{cases}$ к) $\begin{cases} y - |x| = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y - |x - 1| = 0, \\ |x + 1| - y = 0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} y - |x| = 0, \\ |x| + y = 3; \end{cases}$ л) $\begin{cases} y - |x - 1| = 0, \\ y - |x - a| = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y - |x + 3| = 0, \\ |x + 1| - y = 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} y - |x| = 1, \\ y + |x| = 5; \end{cases}$ м) $\begin{cases} y - |x + 2| = 0, \\ y = |x - a|. \end{cases}$

(*Ответы:* а) решений нет; б) решений нет; в) одно; г) одно; д) два; е) два; ж) два; з) два; и) бесконечно много; к) бесконечно много; л) при $a \neq 1$ одно, при $a = 1$ бесконечно много; м) при $a \neq -2$ одно, при $a = 1$ бесконечно много.)

3. При всех значениях параметра a определите число решений уравнения:

а) $|x - 3| = a$;
б) $|x + 2| = a$;
в) $|x - 3| = a - x$;
г) $|x + 5| = x - a$;
д) $(x - 1)^2 = a$;
е) $(3 - x)^2 = a$;
ж) $x^2 + 4x = a$;
з) $x^2 - 4x = a$;
и) $|x - 1| = |x| + a$;
к) $|x + 1| + |x + 2| = a$;
л) $|x - 3| + |x + 4| = a$.

(*Ответы:* а, б) при $a < 0$ решений нет, при $a = 0$ одно, при $a > 0$ два; в) при $a < 3$ решений нет, при $a = 3$ бесконечно много, при $a > 3$ одно; г) при $a < -5$ одно, при $a = -5$ бесконечно много, при $a > -5$ решений нет; д, е) при $a < 0$ решений нет, при $a = 0$ одно, при $a > 0$ два; ж, з) при $a < -4$ решений нет, при $a = -4$ одно, при $a > -4$ два; и) при $a < -1$ и $a > 1$ решений нет, при $a = -1$ и $a = 1$ бесконечно много, при $-1 < a < 1$ одно; к) при $a < 3$ решений нет, при $a = 3$ бесконечно много, при $a > 3$ два; л) при $a < 7$ решений нет, при $a = 7$ бесконечно много, при $a > 7$ два.)

V. Подведение итогов урока

Факультативные уроки. Зачет по теме «Системы линейных уравнений»

Цели: сравнить успеваемость учащихся при одинаковой сложности заданий; иметь возможность повысить оценки за выполненные контрольные работы.

Тип уроков: уроки контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Общая характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи представлены в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается 1 баллом, из блока В – 2 баллами, из блока С – 3 баллами. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Работа рассчитана на два урока.

III. Зачетная работа

Вариант 1

А

1. Графическим способом решите систему уравнений
$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$

2. Способом подстановки решите систему уравнений
$\begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

3. Способом сложения решите систему уравнений
$\begin{cases} -2x + 3y = 11, \\ 3x + 2y = 3. \end{cases}$

4. Парабола $y = ax^2 + b$ проходит через точки A (2; 5) и B (4; 11). Найдите числа a и b.

5. Используя графический способ, определите число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y - x = 1. \end{cases}$

6. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases} 2x + ay = 4, \\ 4x + 3y = 2a. \end{cases}$

7. На стоянке 18 машин и велосипедов, у которых вместе 60 колес. Сколько машин и сколько велосипедов находится на стоянке?

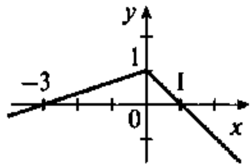
В

8. Способом подстановки решите систему уравнений
$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x + y - z = 0, \\ 3x + 2y + z = 10. \end{cases}$

9. При каких значениях параметра a система уравнений
$\begin{cases} 6x + 8y = 2, \\ 3x + 4y = a^2 - 3 \end{cases}$ не имеет решений?

10. Решите уравнение $2x^2 - 2x + 4y^2 + 4xy + 1 = 0$.

11. Напишите уравнение ломаной, изображенной на рисунке.



С

12. Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3, \\ 4x + 2y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 6. \end{cases}$$

Найдите сумму $x_0 + y_0 + z_0$.

13. Сколько лет брату и сестре, если 4 года назад брат был старше сестры в 5 раз, а через 5 лет брат будет старше сестры в 2 раза?

14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A (2; 3) и через точку пересечения графиков функций $y = |x|$ и $y = |x - 2|$.

Вариант 2

А

1. Графическим способом решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

2. Способом подстановки решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$$

3. Способом сложения решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$$

4. Парабола $y = ax^2 + b$ проходит через точки A (1; 3) и B (3; –5). Найдите числа a и b.

5. Используя графический способ, определите число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y = 0, \\ x - y = 1. \end{cases}$

6. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases} 3x - ay = 3, \\ 4x - 2y = 4a. \end{cases}$

7. На стоянке 26 машин и велосипедов, у которых вместе 88 колес. Сколько машин и сколько велосипедов находится на стоянке?

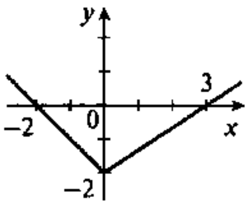
B

8. Способом подстановки решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2y + z = 7, \\ 2x + 3y - 2z = 2. \end{cases}$$

9. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 8x - 4y = 8, \\ 2x - y = a^2 - 2 \end{cases}$ не имеет решений?

10. Решите уравнение $x^2 + 10y^2 - 6xy + 4y + 4 = 0$.

11. Напишите уравнение ломаной, изображенной на рисунке.



C

12. Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ – решение системы уравнений
$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x + 4y + 6z = 7, \\ 4x + y + z = 3. \end{cases}$$
Найдите сумму $x_0 + y_0 + z_0$.

13. Сколько лет брату и сестре, если 3 года назад брат был старше сестры в 4 раза, а через 5 лет брат будет старше сестры в 2 раза?

14. Напищите уравнение прямой, проходящей через точку $A\ (1;\ 5)$ и через точку пересечения графиков функций $y = |x + 2|$ и $y = |x|$.

IV. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

A

1. $(1;\ -1)$.
2. $(2;\ 1)$.
3. $(-1;\ 3)$.

4. $a = 0{,}5$, $b = 3$.

5. Два решения.

6. При $a \neq 1{,}5$ единственное решение, при $a = 1{,}5$ решений нет.

7. 12 машин, 6 велосипедов.

В

8. $(1; 2; 3)$.

9. При $a \neq \pm 2$.

10. $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

11. $y = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1, \text{ если } x < 0, \\ -x + 1, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$

С

12. В системе уравнений $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3, \\ 4x + 2y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 6 \end{cases}$ в левые части каждая из переменных входит ровно 8 раз. Поэтому сложим левые и правые части всех трех уравнений. Получаем $2x + 3y + 4z + 4x + 2y + 3z + 2x + 3y + z = 3 + 7 + 6$, или $8x + 8y + 8z = 16$, или $8(x + y + z) = 16$.

Разделим обе части этого равенства на число 8 и найдем $x + y + z = 2$. Поэтому если $(x_0; y_0; z_0)$ – решение данной системы, то $x_0 + y_0 + z_0 = 2$.

(*Ответ:* 2.)

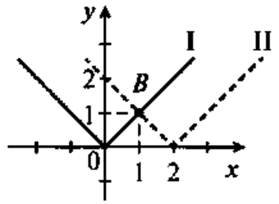
13. Пусть сейчас брату x лет, сестре y лет. Брату 4 года назад было $x - 4$ лет, а сестре $y - 4$ лет. По условию брат был старше сестры в 5 раз. Поэтому получаем уравнение $x - 4 = 5(y - 4)$. Через 5 лет брату будет $x + 5$ лет, а сестре $y + 5$ лет. Тогда брат будет в 2 раза старше сестры. Имеем второе уравнение $x + 5 = 2(y + 5)$.

Получили систему уравнений $\begin{cases} x - 4 = 5(y - 4), \\ x + 5 = 2(y + 5) \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 5y - 16, \\ x = 2y + 5. \end{cases}$

Так как в уравнениях одинаковые левые части, то приравняем и правые. Получаем линейное уравнение с одним неизвестным: $5y - 16 = 2y + 5$ или $3y = 21$, откуда $y = 7$. Из первого уравнения находим $x = 5 \cdot 7 - 16 = 35 - 16 = 19$. Итак, сейчас брату 19 лет, а сестре 7 лет.

(*Ответ:* брату 19 лет, сестре 7 лет.)

14. Сначала найдем точку пересечения графиков функций $y = |x|$ и $y = |x - 2|$. Для этого построим графики таких функций (графики I и II соответственно). Видно, что графики пересекаются в одной точке B (1; 1).



Теперь рассмотрим линейную функцию $y = ax + b$. По условию ее график проходит через точки A (2; 3) и B (1; 1). Поэтому координаты этих точек удовлетворяют уравнению линейной функции. Получаем систему уравнений $\begin{cases} 3 = 2a + b, \\ 1 = a + b. \end{cases}$

Решим эту систему способом подстановки. Из второго уравнения выразим $a = 1 - b$. Подставим это значение в первое уравнение и получим $3 = 2(1 - b) + b$, или $3 = 2 - 2b + b$, или $1 = -b$, откуда $b = -1$. Используя формулу $a = 1 - b$, найдем $a = 1 - (-1) = 2$. Итак, уравнение данной прямой $y = 2x - 1$.

(*Ответ*: $y = 2x - 1$.)

Вариант 2

А

1. (2; 1).
2. (1; –1).
3. (2; –1).
4. $a = -1$, $b = 4$.
5. Два решения.
6. При $a \neq 1{,}5$ единственное решение, при $a = 1{,}5$ решений нет.
7. 18 машин, 8 велосипедов.

В

8. (1; 2; 3).
9. При $a \neq \pm 2$.
10. (–6; –2).
11. $y = \begin{cases} -x - 2, \text{ если } x < 0, \\ \dfrac{2}{3}x - 2, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$

С

12. В системе уравнений $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x + 4y + 6z = 7, \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$ в левые части каждая из переменных входит ровно 9 раз. Поэтому сложим левые и правые части всех трех уравнений. Получаем $3x + 4y + 2z + 2x + 4y + 6z + 4x + y + z = 8 + 7 + 3$, или $9x + 9y + 9z = 18$, или $9(x + y + z) = 18$.

Разделим обе части этого равенства на число 9 и найдем $x + y + z = 2$. Поэтому если $(x_0; y_0; z_0)$ – решение данной системы, то $x_0 + y_0 + z_0 = 2$.

(*Ответ:* 2.)

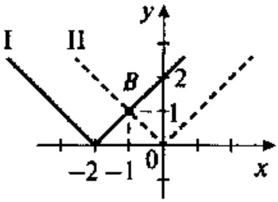
13. Пусть сейчас брату x лет, а сестре y лет. Брату 3 года назад было $x - 3$ лет, а сестре $y - 3$ лет. По условию брат был старше сестры в 4 раза. Поэтому получаем уравнение $x - 3 = 4(y - 3)$. Через 5 лет брату будет $x + 5$ лет, а сестре $y + 5$ лет. Тогда брат будет в 2 раза старше сестры. Имеем второе уравнение $x + 5 = 2(y + 5)$.

Получили систему уравнений $\begin{cases} x - 3 = 4(y - 3), \\ x + 5 = 2(y + 5) \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 4y - 9, \\ x = 2y + 5. \end{cases}$

Так как в уравнениях одинаковые левые части, то приравняем и правые. Получаем линейное уравнение с одним неизвестным: $4y - 9 = 2y + 5$ или $2y = 14$, откуда $y = 7$. Из первого уравнения находим $x = 4 \cdot 7 - 9 = 28 - 9 = 19$. Итак, сейчас брату 19 лет, а сестре 7 лет.

(*Ответ:* брату 19 лет, сестре 7 лет.)

14. Сначала найдем точку пересечения графиков функций $y = |x + 2|$ и $y = |x|$. Для этого построим графики таких функций (графики I и II соответственно). Видно, что графики пересекаются в одной точке B $(-1; 1)$.



Теперь рассмотрим линейную функцию $y = ax + b$. По условию ее график проходит через точки A $(1; 5)$ и B $(-1; 1)$. Поэтому координаты этих точек удовлетворяют уравнению линейной функции. Получаем систему уравнений $\begin{cases} 5 = a + b, \\ 1 = -a + b. \end{cases}$

Решим эту систему способом сложения. Сложим левые и правые части уравнений системы и получим $5 + 1 = b + b$ или $6 = 2b$, откуда $b = 3$. Подставим это значение в первое уравнение системы $5 = a + 3$, откуда $a = 2$. Итак, уравнение данной прямой $y = 2x + 3$.

(*Ответ:* $y = 2x + 3$.)

V. Подведение итогов уроков

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА 7 КЛАССА

ПОДГОТОВКА К ИТОГОВОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Урок 95. Повторение темы «Выражения. Тождества. Уравнения»

Цель: повторить способы решения типовых задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

(В начале урока желательно с помощью фронтального опроса напомнить учащимся основные понятия данной темы.)

Алгебраическим выражением называется запись, составленная из букв и чисел с помощью арифметических действий и скобок. Переменными называются буквы, входящие в алгебраическое выражение.

Значением алгебраического выражения называется значение числового выражения, которое получается при подстановке в алгебраическое выражение выбранных значений переменных.

Допустимыми значениями переменных в алгебраическом выражении называются такие значения переменных, при которых данное выражение имеет смысл (т. е. выполнимы все действия с этими переменными).

Формулой называется равенство, обе части которого являются алгебраическими выражениями.

Основные свойства операций сложения и умножения чисел:

1. *Переместительное свойство:* $a + b = b + a$ и $a \cdot b = b \cdot a$. От перестановки слагаемых сумма чисел не меняется. От перестановки сомножителей произведение чисел не меняется.

2. *Сочетательное свойство:* $(a + b) + c = a + (b + c)$ и $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. При сложении и умножении чисел их можно произвольным образом объединить в группы.

3. *Распределительное свойство:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. При умножении числа на сумму чисел данный множитель умножается на каждое слагаемое и полученные произведения складываются.

Тождественно равными называются *выражения*, соответственные значения которых равны при любых допустимых значениях переменных. *Тождеством* называется равенство, связывающее два тождественно равных выражения. *Тождественным преобразованием* выражения называют замену этого выражения тождественно равным ему.

Уравнением с одним неизвестным называют равенство между двумя алгебраическими выражениями с одной переменной. *Корнем уравнения* называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство. *Решить уравнение* означает найти все его корни или доказать, что корней нет. Уравнения, которые имеют одни и те же корни, называют *равносильными*. Уравнения, которые не имеют корней, также считают равносильными. Решение уравнения состоит в его постепенной замене более простыми равносильными уравнениями. При решении уравнений используются следующие *свойства*:

1. Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится равносильное уравнение.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на число (не равное нулю), то получится равносильное уравнение.

Линейным уравнением называется уравнение вида $ax = b$ (где x – переменная, a и b – некоторые числа). При решении линейного уравнения возможны три следующих случая:

1) если $a \neq 0$, то уравнение имеет один корень $x = \frac{b}{a}$;

2) если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней;

3) если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение корней не имеет.

Модулем числа (выражения) a называют само это число a, если оно неотрицательное, и противоположное по знаку число $-a$, если число a отрицательное, т. е. $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

III. Задания на уроке

№ 210 (а), 212 (а, в), 228 (а), 231 (б), 237 (а), 240 (а, б), 241 (г), 249.

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 210 (б), 212 (б, г), 228 (б), 231 (а), 237 (б, в), 240 (в, г), 241 (е), 250.

Урок 96. Повторение темы «Функции»

Цель: повторить способы решения типовых задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

(В начале урока желательно с помощью фронтального опроса напомнить учащимся основные понятия данной темы.)

Функцией (или функциональной зависимостью) называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению x соответствует единственное значение y. Переменную x называют независимой переменной (или аргументом), переменную y – зависимой переменной.

Область определения функции – все значения, которые может принимать независимая переменная x.

Область значений (или область изменения) функции – те значения, которые при этом принимает зависимая переменная y.

Способы задания функции:

1) аналитический;
2) табличный;
3) графический.

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$ (где k и b – некоторые числа). Графиком линейной функции является *прямая линия*. Функцию $y = kx$ называют *прямой пропорциональной зависимостью*. Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.

III. Задания на уроке

№ 354, 355, 361 (а), 364, 365, 367 (а, в, д), 368 (б), 370, 372 (а, б).

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 353, 356, 361 (б), 362, 366, 367 (б, г, е), 368 (а), 371, 372 (в, г), 373.

Урок 97. Повторение темы «Степень с натуральным показателем»

Цель: повторить способы решения типовых задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

(В начале урока желательно с помощью фронтального опроса напомнить учащимся основные понятия данной темы.)

Степенью числа a с натуральным показателем n ($n \geq 2$) называется произведение n одинаковых сомножителей a, т. е. $a^n = \underbrace{aa...a}_{n \text{ раз}}$. Повторяющийся *множитель a* называют *основанием* степени, *число* повторяющихся множителей n – *показателем* степени. При этом $a^1 = a$ и при $a \neq 0$ $a^0 = 1$.

Свойства степеней с натуральным показателем:

1) $a^m a^n = a^{m+n}$ (при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют тем же, а показатели степеней складывают);

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, $m \geq n$ (при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют тем же, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя);

3) $(a^m)^n = a^{mn}$ (при возведении степени в степень основание оставляют тем же, а показатели степени умножают);

4) $(ab)^n = a^n b^n$ (при возведении в степень произведения каждый множитель возводят в эту степень и результаты перемножают);

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, где $b \neq 0$ (при возведении в степень частного числитель и знаменатель возводят в эту степень и результаты делят).

Одночленом называют произведение чисел, переменных и их степеней, а также сами числа, переменные и их степени. *Степенью одночлена* считается сумма показателей степеней всех переменных, входящих в одночлен. Если одночлен не содержит переменных (т. е. является числом), то его степень равна нулю. Запись одночлена в виде произведения числового множителя (коэффициента одночлена), стоящего на первом месте, и степеней различных переменных считают *стандартным видом* одночлена.

График функции $y = x^2$ – парабола. Этот график проходит через начало координат, расположен в первой и второй координатных четвертях, симметричен относительно оси Oy.

График функции $y = x^3$ проходит через начало координат, расположен в первой и третьей координатных четвертях, симметричен относительно начала координат.

III. Задания на уроке

№ 511 (б), 513 (а, г), 524 (а), 525 (а, в, д), 543 (б, г), 554 (а, б), 560 (б, д), 564 (а), 565 (а, г).

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 511 (а), 513 (б, в), 524 (б), 525 (б, г, е), 543 (а, в), 554 (в, г), 560 (в, е), 564 (б), 565 (б, в).

Урок 98. Повторение темы «Многочлены»

Цель: повторить способы решения типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

(В начале урока желательно с помощью фронтального опроса напомнить учащимся основные понятия данной темы.)

Многочленом называют алгебраическую сумму одночленов.

Сами одночлены называют членами многочлена. Одночлен можно рассматривать как многочлен, состоящий из одного члена. В многочленах алгебраические суммы подобных членов заменяют одним одночленом (приведение подобных членов). Многочлен имеет *стандартный вид*, если все входящие в него одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены. *Степенью* многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов.

При сложении и вычитании многочленов используют *правило раскрытия скобок*. Если перед скобками стоит знак «плюс», то их можно опустить, сохраняя знак каждого слагаемого, заключенного в скобки. Если перед скобками стоит знак «минус», то их можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки.

Чтобы *умножить одночлен на многочлен*, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Чтобы *умножить многочлен на многочлен*, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Запись данного многочлена в виде произведения других многочленов называют *разложением многочлена на множители*. Для разложения многочлена на множители существуют следующие *способы*:

1) вынесение общего множителя за скобки;

2) группировка членов многочлена;

3) использование формул сокращенного умножения.

III. Задания на уроке

№ 734 (а), 743 (б), 745 (а, в), 747, 749, 754 (в, д), 757, 768 (д), 778 (а, г), 792 (а, в), 793 (а, б), 794 (а), 795 (а, г).

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 734 (б), 743 (в), 745 (б, г), 748, 750, 754 (г, е), 758, 768 (е), 778 (б, д), 792 (б, г), 793 (в, г), 794 (б), 795 (б, в).

Урок 99. Повторение темы «Формулы сокращенного умножения»

Цель: повторить способы решения типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

(Учитывая частое использование этих формул в курсе алгебры, полезно напомнить их учащимся.)

Формулы сокращенного умножения:

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения);

2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения);

3) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (разность квадратов двух выражений равна произведению разности и суммы этих выражений);

4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности);

5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы);

6) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго плюс куб второго выражения);

7) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго минус куб второго выражения).

III. Задания на уроке

№ 970 (а, в, д), 977 (б, г), 978 (а, в), 983 (а), 989 (в, д), 994 (а), 1010 (а, в), 1012 (б), 1013 (а).

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 970 (б, г, е), 977 (а, в), 978 (б, г), 983 (б), 989 (а, б), 994 (б), 1010 (б, г), 1012 (а), 1013 (б).

Урок 100. Повторение темы «Системы линейных уравнений»

Цель: повторить способы решения типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

(В начале урока желательно с помощью фронтального опроса напомнить учащимся основные понятия данной темы.)

Равенство, содержащее две переменные, называют *уравнением с двумя переменными* (или двумя неизвестными). Если в уравнение переменные входят только *в первой степени*, то такое уравнение называют *линейным* уравнением с двумя переменными. Линейное уравнение имеет вид $ax + by = c$ (где x и y – переменные, a, b и c – некоторые числа). *Решением уравнения* с двумя переменными называют пару значений переменных, при подстановке которых уравнение становится верным числовым равенством.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют *равносильными*. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считают равносильными.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной:

1) если в уравнении перенести любой член из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

2) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же (не равное нулю) число, то получится уравнение, равносильное данному.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными имеет вид $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ где x и y – переменные, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – некоторые числа.

1. Если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение.

2. Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений.

3. Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечно много решений.

Способы решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными:

1) графический;
2) подстановка;
3) сложение;
4) сравнение.

III. Задания на уроке

№ 1141 (а), 1143, 1147, 1150, 1151 (б), 1152, 1159, 1162 (а), 1166, 1169 (в), 1170 (а, в), 1175 (а), 1177, 1182.

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 1141 (б), 1144, 1148, 1149, 1151 (в), 1153, 1160, 1162 (б), 1167, 1169 (г), 1170 (б, г), 1175 (б), 1178, 1183.

Урок 101. Итоговая контрольная работа

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по базовым темам курса.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Работа составлена в двух вариантах. Все задачи имеют примерно одинаковую сложность и контролируют основные умения:

1) проводить преобразования алгебраических выражений с использованием формул сокращенного умножения и вычислять их числовые значения;

2) решать линейные и нелинейные уравнения;

3) использовать свойства степени с натуральным показателем для вычисления значений числовых выражений;

4) строить графики линейных функций, определять принадлежность данной точки графику функции;

5) решать системы линейных уравнений и применять такие системы для решения текстовых задач.

Оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает учащимся некоторую свободу выбора.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Упростите выражение $(a + 2b)^2 - (a - b)(b + a)$ и найдите его значение при $a = 1$ и $b = \frac{1}{5}$.

2. Решите уравнение $\frac{5x+2}{3} + \frac{3x-1}{5} = 5$.

3. Найдите значение выражения $\frac{(3^4)^2 \cdot 2^{11}}{4 \cdot 36^4}$.

4. Постройте график функции $y = 3x - 6$ и определите, проходит ли он через точки A (41; 117) и B (53; 152).

5. Сумма двух чисел равна 80, а сумма 50% первого числа и 25% второго числа равна 26. Найдите эти числа.

6. Решите уравнение $(x - 2)(5x + 3) = (x - 2)(3x - 5)$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $(2a + b)^2 - (2a - 3b)(3b + 2a)$ и найдите его значение при $a = 2$ и $b = \frac{1}{5}$.

2. Решите уравнение $\frac{4x+2}{7}+\frac{3x-5}{4}=3.$

3. Найдите значение выражения $\frac{(5^3)^5\cdot 3^{16}}{9\cdot 225^7}.$

4. Постройте график функции $y=2x-4$ и определите, проходит ли он через точки A (43; 82) и B (56; 106).

5. Сумма двух чисел равна 90, а сумма 75% первого числа и 50% второго числа равна 61. Найдите эти числа.

6. Решите уравнение $(x-3)(6x+5)=(x-3)(2x-3)$.

IV. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. Используя формулы квадрата суммы и разности квадратов, упростим данное выражение. Получаем $(a+2b)^2-(a-b)(b+a)=$ $=(a+2b)^2-(a-b)(a+b)=a^2+4ab+4b^2-(a^2-b^2)=a^2+4ab+$ $+4b^2-a^2+b^2=4ab+5b^2=b(4a+5b)$.

Найдем значение этого выражения при $a=1$ и $b=\frac{1}{5}$.

Получаем $\frac{1}{5}\cdot\left(4\cdot 1+5\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}\cdot(4+1)=\frac{1}{5}\cdot 5=1.$

(*Ответ:* 1.)

2. Умножим все члены уравнения $\frac{5x+2}{3}+\frac{3x-1}{5}=5$ на число 15. Получаем равносильное уравнение $\frac{5x+2}{3}\cdot 15+\frac{3x-1}{5}\cdot 15=$ $=5\cdot 15$, или $(5x+2)\cdot 5+(3x-1)\cdot 3=75$, или $25x+10+9x-3=$ $=75$, или $34x=68$, откуда $x=2$.

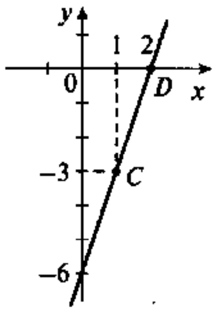
(*Ответ:* $x=2$.)

3. Учтем, что $3\cdot 2=6$, и используем свойства степеней. Получаем $\frac{(3^4)^2\cdot 2^{11}}{4\cdot 36^4}=\frac{3^{4\cdot 2}\cdot 2^{8+3}}{4\cdot(6^2)^4}=\frac{3^8\cdot 2^8\cdot 2^3}{4\cdot 6^{2\cdot 4}}=\frac{(3\cdot 2)^8\cdot 2^3}{4\cdot 6^8}=\frac{6^8\cdot 8}{4\cdot 6^8}=2.$

(*Ответ:* 2.)

4. Построим график функции $y=3x-6$. Этим графиком будет прямая линия. Для построения найдем две точки, принадлежащие графику. Например, при $x=1$ найдем $y=3\cdot 1-$ $-6=-3$, при $x=2$ найдем $y=3\cdot 2-6=0$. Таким образом, график проходит через точки C (1; −3) и D (2; 0). Отметим эти точки и проведем через них прямую.

Теперь определим, проходит ли она через точки A (41; 117) и B (53; 152). Найдем значение функции при $x=41$ и получим $y=3\cdot 41-6=123-6=117$. Так как это значение равно ординате точки A, то график проходит через точку A.



Найдем значение функции при $x = 53$ и получим $y = 3 \cdot 53 - 6 = 159 - 6 = 153$. Так как это значение не равно ординате точки B, то график не проходит через точку B.

(*Ответ:* проходит через точку A и не проходит через точку B.)

5. Пусть первое число равно x, а второе число равно y. По условию их сумма равна 80. Поэтому получаем первое уравнение $x + y = 80$. Один процент числа x равен $\frac{x}{100}$, тогда 50% числа x равны $\frac{x}{100} \cdot 50 = \frac{x}{2}$. Один процент числа y равен $\frac{y}{100}$, тогда 25% числа y равны $\frac{y}{100} \cdot 25 = \frac{y}{4}$. По условию сумма чисел $\frac{x}{2}$ и $\frac{y}{4}$ равна 26. Поэтому получаем второе уравнение $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 26$.

Имеем систему двух линейных уравнений $\begin{cases} x + y = 80, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 26. \end{cases}$

Решим систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим $y = 80 - x$ и подставим это выражение во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одним неизвестным $\frac{x}{2} + \frac{80 - x}{4} = 26$. Умножим все члены уравнения на число 4 и получим $\frac{x}{2} \cdot 4 + \frac{80 - x}{4} \cdot 4 = 26 \cdot 4$, или $2x + 80 - x = 104$, или $x + 80 = 104$, откуда $x = 24$. Используя формулу $y = 80 - x$, найдем $y = 80 - 24 = 56$.

(*Ответ:* первое число 24, второе число 56.)

6. Перенесем все члены уравнения $(x - 2)(5x + 3) = (x - 2) \times (3x - 5)$ в левую часть и разложим их на множители. Получаем $(x - 2)(5x + 3) - (x - 2)(3x - 5) = 0$, или $(x - 2)(5x + 3 - 3x + 5)$, или $(x - 2)(2x + 8) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из этих множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения $x - 2 = 0$ (корень $x = 2$) и $2x + 8 = 0$ (корень $x = -4$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x = 2$ и $x = -4$.

(*Ответ:* $x = 2$ и $x = -4$.)

Вариант 2

1. Используя формулы квадрата суммы и разности квадратов, упростим данное выражение. Получаем $(2a + b)^2 - (2a - 3b)(3b + 2a) = (2a + b)^2 - (2a - 3b)(2a + 3b) = 4a^2 + 4ab + b^2 - (4a^2 - 9b^2) = 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 + 9b^2 = 4ab + 10b^2 = 2b(2a + 5b)$.

Найдем значение этого выражения при $a = 2$ и $b = \frac{1}{5}$.

Получаем $2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(2 \cdot 2 + 5 \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} \cdot (4+1) = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2.$

(*Ответ:* 2.)

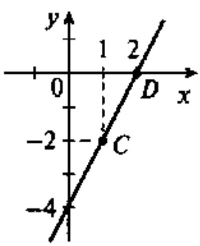
2. Умножим все члены уравнения $\frac{4x+2}{7} + \frac{3x-5}{4} = 3$ на число 28. Получаем равносильное уравнение $\frac{4x+2}{7} \cdot 28 + \frac{3x-5}{4} \cdot 28 = 3 \cdot 28$, или $(4x + 2) \cdot 4 + (3x - 5) \cdot 7 = 84$, или $16x + 8 + 21x - 35 = 84$, или $37x = 111$, откуда $x = 3$.

(*Ответ:* $x = 3$.)

3. Учтем, что $5 \cdot 3 = 15$, и используем свойства степеней. Получаем $\frac{(5^3)^5 \cdot 3^{16}}{9 \cdot 225^7} = \frac{5^{3 \cdot 5} \cdot 3^{16}}{9 \cdot (15^2)^7} = \frac{5^{15} \cdot 3^{16}}{9 \cdot 15^{14}} = \frac{5^{14} \cdot 5 \cdot 3^{14} \cdot 3^2}{9 \cdot 15^{14}} = \frac{(5 \cdot 3)^{14} \cdot 5 \cdot 9}{9 \cdot 15^{14}} = \frac{15^{14} \cdot 5}{15^{14}} = 5.$

(*Ответ:* 5.)

4. Построим график функции $y = 2x - 4$. Этим графиком будет прямая линия. Для построения найдем две точки, принадлежащие графику. Например, при $x = 1$ найдем $y = 2 \cdot 1 - 4 = -2$, при $x = 2$ найдем $y = 2 \cdot 2 - 4 = 0$. Таким образом, график проходит через точки C (1; –2) и D (2; 0). Отметим эти точки и проведем через них прямую.



Теперь определим, проходит ли она через точки A (43; 82) и B (56; 106). Найдем значение функции при $x = 43$ и получим $y = 2 \cdot 43 - 4 = 86 - 4 = 82$. Так как это значение равно ординате точки A, то график проходит через точку A.

Найдем значение функции при $x = 56$ и получим $y = 2 \cdot 56 - 4 = 112 - 4 = 108$. Так как это значение не равно ординате точки B, то график не проходит через точку B.

(*Ответ:* проходит через точку A и не проходит через точку B.)

5. Пусть первое число равно x, а второе число равно y. По условию их сумма равна 90. Поэтому получаем первое уравнение $x + y = 90$. Один процент числа x равен $\frac{x}{100}$, тогда 75% числа x равны $\frac{x}{100} \cdot 75 = \frac{3}{4}x$. Один процент числа y равен $\frac{y}{100}$, тогда 50% числа y равны $\frac{y}{100} \cdot 50 = \frac{y}{2}$. По условию сумма чисел $\frac{3}{4}x$ и $\frac{y}{2}$ равна 61. Поэтому получаем второе уравнение $\frac{3}{4}x + \frac{y}{2} = 61$.

Имеем систему двух линейных уравнений $\begin{cases} x + y = 90, \\ \frac{3}{4}x + \frac{y}{2} = 61. \end{cases}$

Решим систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим $y = 90 - x$ и подставим это выражение во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одним неизвестным $\frac{3}{4}x + \frac{90 - x}{2} = 61$. Умножим все члены уравнения на число 4 и получим $\frac{3}{4}x \cdot 4 + \frac{90 - x}{2} \cdot 4 = 61 \cdot 4$, или $3x + (90 - x) \cdot 2 = 244$, или $3x + 180 - 2x = 244$, или $x + 180 = 244$, откуда $x = 64$. Используя формулу $y = 90 - x$, найдем $y = 90 - 64 = 26$.

(*Ответ:* первое число 64, второе число 26.)

6. Перенесем все члены уравнения $(x - 3)(6x + 5) = (x - 3) \times (2x - 3)$ в левую часть и разложим их на множители. Получаем $(x - 3)(6x + 5) - (x - 3)(2x - 3) = 0$, или $(x - 3)(6x + 5 - 2x + 3) = 0$, или $(x - 3)(4x + 8) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из этих множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения $x - 3 = 0$ (корень $x = 3$) и $4x + 8 = 0$ (корень $x = -2$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x = 3$ и $x = -2$.

(*Ответ:* $x = 3$ и $x = -2$.)

Урок 102. Подведение итогов обучения

Цель: проанализировать результаты обучения и успехи учащихся.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основная часть

1. Анализ изучения материала (темы, которые усвоены хорошо, и темы, которые усвоены недостаточно хорошо, указание причин: невнимательность, незнание основных формул, арифметические ошибки).
2. Личные успехи и недочеты каждого учащегося, рекомендации по улучшению успеваемости.
3. Краткая характеристика следующего учебного года (изучаемые темы, их применение при решении прикладных задач).
4. Поздравление с окончанием учебного года и с наступающими каникулами.

Список литературы

1. *Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др.* Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2014.

2. *Балк М.Б., Балк Г.Д.* Математика после уроков: пособие для учителей. М.: Просвещение, 1971.

3. *Бурмистрова Т.А.* Алгебра. 7–9 классы: программы общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2010.

4. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике. М.: Наука, 1972.

5. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика: справочные материалы. М.: Просвещение, 2003.

6. *Звавич Л.И., Кузнецова Л.В., Суворова С.Б.* Алгебра. 7 класс: дидактические материалы. М.: Просвещение, 2014.

7. *Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Козулин Б.В.* Алгебра. 7 класс: контрольные и проверочные работы. М.: Дрофа, 2007.

8. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки. М.: Наука, 1982.

9. *Короткова Л.М., Савинцева Н.В.* Алгебра. Тесты: рабочая тетрадь. 7 класс. М.: Рольф, 2002.

10. *Кострикина Н.П.* Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов: книга для учителя. М.: Просвещение, 1991.

11. *Куликова О.В., Рурукин А.Н., Сафарова Ю.А.* Алгебра. 7 класс: сборник решений задач. М.: Яхонт, 2001.

12. *Лебидько В.В., Рурукин А.Н.* Математика. Алгебра и геометрия: пособие для учащихся 7 класса. М.: МИФИ, 2001.

13. *Лебидько В.В., Рурукин А.Н.* Алгебра. 7 класс: сборник решений задач. М.: Яхонт, 2002.

14. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.* Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. С.А. Теляковского. М.: Просвещение, 2014.

15. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.* Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений (с углубленным изучением математики). М.: Мнемозина, 2013.

16. *Миркина А.М., Рурукин А.Н., Сергеев А.М. и др.* Алгебра. 7 класс: сборник решений задач. М.: Яхонт, 2002.

17. *Мордкович А.Г., Мишустина Т.Н., Тульчинская Е.Е.* Алгебра. 7 класс: задачник. М.: Мнемозина, 2000.

18. *Перельман Я.И.* Живая математика. М.: Наука, 1978.

19. *Перельман Я.И.* Занимательная алгебра. М.: Наука, 1970.

20. Рабочая программа по алгебре. 7 класс / Сост. Г.И. Маслакова. М.: ВАКО, 2013.

21. *Рурукин А.Н.* Математика: пособие для интенсивной подготовки к выпускному, вступительному экзаменам и ЕГЭ по математике. М.: ВАКО, 2004.

22. *Рурукин А.Н., Лупенко Г.В., Масленникова И.А.* Поурочные разработки по алгебре. 7 класс. М.: ВАКО, 2014.

23. *Хачатурьян И.В.* Практическое руководство по решению задач по алгебре в 7–9 классах. М.: Яхонт, 2000.

24. *Цыпкин А.Г.* Справочник по математике для средних учебных заведений. М.: Наука, 1988.

25. *Цыпкин А.Г., Пинский А.И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. М.: Наука, 1983.

Содержание

ГЛАВА V. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

ГЛАВА VI. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Рурукин Александр Николаевич

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ

к учебнику Ю.Н. Макарычева и др.
(*М.: Просвещение*)

7 класс

Выпускающий редактор *Наталья Муравьёва*
Дизайн обложки *Юлии Морозовой*

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати 27.05.2014.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Newton.
Усл. печ. листов 18,48. Тираж 5000 экз. Заказ № 0784/14.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт»,
170546 Тверская область, Промышленная зона Боровлево-1,
комплекс № 3А, www.pareto-print.ru